LA1-Vorlesung 25.01.2002

$Hom(V,W)$. Spezialfall: $W=\mathbb{K}$, $Hom(V,\mathbb{K}) =: V^*$ Dualraum von V.
Elemente x^* (statt Φ) Linearformen (lineares Funktional)
$x^*: V \to \mathbb{K}$ lineare Abbildung.

Beispiele:

(a) Frühere Beispiele: Integral, Grenzwert

(b) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (VR aller Abb. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ fest.
$\Phi: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x_0)$ linear, Auswertungsfunktional

(c) $V = \mathbb{K}^{n \times n}$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} =: \text{Spur von } A$$

ist Linearform.

Ist $\dim V = n$, so ist auch $\dim V^* = n$. (nach Satz 10).
$\Rightarrow V \cong V^*$. Ist $x_1, \dots, x_n$ Basis von V, so wird
$x_j^*(x_k) := \delta_{jk}$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ eine Basis $x_1^*, \dots, x_n^*$
von V^* definiert; die Dualbasis zur Basis $x_1, \dots, x_n$.
x_j^* heißt j-tes Koordinatenfunktional.
Sei $x \in V \Rightarrow x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ mit $a_i \in \mathbb{K}$.
$\Rightarrow x_j^*(x) = x_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_j^*(x_i) = a_j$
$\Rightarrow x = x_1^*(x) \cdot x_1 + \dots + x_n^*(x) \cdot x_n$, $x \in V$.
Analog $x^* = x^*(x_1) x_1^* + \dots + x^*(x_n) x_n^*$, $x^* \in V^*$
Jedes $x^* \in V^*$ ist von der Form $x^* = a_1 x_1^* + \dots + a_n x_n^*$
$\Rightarrow x^* \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ ist ein Isomorphismus. $V^* \to \mathbb{K}^n$.
Diese Abb. hängt von Basis $x_1, \dots, x_n$ von V ab, außerdem von der Reihenfolge der Basisvektoren.
Speziell: $V = \mathbb{K}^n \Rightarrow$ „Natürliche" Basis (und Reihenfolge)
$e_1, \dots, e_n$ $(e_i = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te} \\ \text{Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0))$, Dualbasis $e_1^*, \dots, e_n^*$.

Hier identifiziert man $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $\mathbb{K}^n$ (d.h.
$e_j^* = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$).
Sei $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^n (= (\mathbb{K}^n)^*)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,
$y(x) = (y_1 e_1^* + \dots + y_n e_n^*)(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
$= \langle x, y \rangle$ Standardskalarprodukt.
Sei jetzt wieder V beliebig $\mathbb{K}$-VR und V^* der Dualraum. $V^{**} := (V^*)^*$ heißt der Bidualraum von V. Zusammenhang: V, V^{**}?
Zu $x \in V$ sei $x^{**} \in V^{**}$ wie folgt definiert:
$x^{**}(x^*) := x^*(x)$, $x^* \in V^*$.

__Satz 11:__

Sei V $\mathbb{K}$-VR und V^{**} der Bidualraum. Die Abb. $\Psi: V \to V^{**}$, $x \mapsto x^{**}$ ist injektiv*. Ist $\dim V = n$, so ist $\dim V^{**} = n$ und Ψ ist ein Isomorphismus. [*Ψ ist Homomorphismus.]

__Beweis:__

Ψ ist linear: $\Psi(ax + by) = (ax + by)^{**}$. Nun ist
$(ax + by)^{**}(x^*) = x^*(ax + by) = ax^*(x) + bx^*(y)$
$= ax^{**}(x^*) + by^{**}(x^*) = (ax^{**} + by^{**})(x^*)$
$x^* \in V^*$ beliebig $\Rightarrow \underbrace{(ax + by)^{**}}_{\Psi(ax+by)} = \underbrace{ax^{**} + by^{**}}_{a\Psi(x) + b\Psi(y)}$

Ψ injektiv: Sei $\Psi(x) = 0$, d.h. $x^{**} = 0 \Rightarrow \underbrace{x^{**}(x^*)}_{x^*(x)} = 0 \ \forall x^* \in V^*$
$\Rightarrow x^*(x) = 0 \ \forall x^* \in V^*$. Ang. $x \neq 0 \Rightarrow$ Ergänze x zu Basis B von V. Setze $x^*(x) = 1$ und $x^*(y) = 0 \ \forall y \in B \setminus \{x\}$,
$\Rightarrow x^* \in V^* \Rightarrow$ Widerspruch zu $x^*(x) = 0 \ \forall x^* \in V^* \Rightarrow x = 0$.

__Definition:__

$\Phi: V \to W$, $V^* \to W^*$: Φ^T transponierte Abbildung.

$\Phi^T(y^*) := y^* \circ \Phi \quad , y^* \in V^*$

§3 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

Jetzt nur endl.-dimensionale VR V. Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, also $\dim V = n$. Das „n-Tupel" $(b_1, \dots, b_n) \in V^n$ heißt geordnete Basis.

Zu $x \in V$ ex. dann eine Darstellung $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$, $x_i \in \mathbb{K}$, die eindeutig ist. Der Vektor $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ heißt Koordinatenvektor von x.

Die Abbildung $V \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto \hat{x}$ ist ein Isomorphismus.

Seien V, W $\mathbb{K}$-VRe, $\Phi : V \to W$ linear. Basis $(b_1, \dots, b_n) =: B$ von V, $(c_1, \dots, c_m) =: B'$ von W. Durch $\Phi(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$, $j = 1, \dots, n$, wird eine Matrix $A_\Phi (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definiert, sie heißt Abbildungsmatrix von Φ (bezgl. B, B').