LA1-Vorlesung 23.01.2002

Satz 4:

(b) $x_1, \dots, x_n$ Basis von V, $\Phi: V \to W$ linear.

Φ surjektiv $\Leftrightarrow$ $\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ ist Erzeugendensystem von W.

Beweis:

$\Phi(V) = [\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)] \Rightarrow$ Beh.

Korollar 6:

Im Fall $\dim V = \dim W = n$ gilt für $\Phi: V \to W$ linear.

Φ injektiv $\Leftrightarrow$ Φ surjektiv $\Leftrightarrow$ Φ injektiv

Beweis:

Korollare 2.9 + 2.11

Satz 7:

Seien V, W K-VRe mit endlicher Dimension. Dann gilt:

$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei $\Phi: V \to W$ Isomorphismus und sei $x_1, \dots, x_n$ Basis von V. $\overset{\text{Satz 5}}{\Rightarrow}$ $\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ sind Basis von W.
$\Rightarrow \dim W = n = \dim V$.

„$\Leftarrow$": $\dim V = \dim W \Rightarrow \exists$ Basen $x_1, \dots, x_n$ von V und $y_1, \dots, y_n$ von B. Durch $\Phi(x_i) = y_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ wird eine lineare Abb. $\Phi: V \to W$ festgelegt (nach Satz 4). Nach Satz 5 ist Φ Isomorphismus.

Bemerkung:

Ohne die Voraussetzung endlicher Dimension gilt nur noch: $V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$. Die Umkehrung gilt nicht mehr.

Satz 8: (Dimensionssatz für lineare Abb.)

Sei $\Phi: V \to W$ lineare Abb. Dann gilt: $\dim V = \dim \operatorname{Kern} \Phi + \dim \operatorname{Bild} \Phi$.

Beweis:

Nach Korollar 2 gilt $\operatorname{Bild} \Phi \cong V/\operatorname{kern}\Phi$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Bild} \Phi = \dim V/\operatorname{kern}\Phi$.

Nach Satz 2.23 gilt $\underbrace{\dim V/\operatorname{kern}\Phi}_{\dim \operatorname{Bild}\Phi} = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \Phi$.

$\Rightarrow$ Beh.

§2 Vektorräume linearer Abbildungen

Satz 9:

Seien V, W, X $\mathbb{K}$-VRe. Dann gilt:

(a) $\Phi: V \to W$, $\Psi: W \to X$ linear $\Rightarrow \Psi \circ \Phi: V \to X$ linear.

(b) Ist $\Phi: V \to W$ Isomorphismus $\Rightarrow \Phi^{-1}: W \to V$ Isomorphismus.

(c) $\Phi, \Psi: V \to W$ linear $\Rightarrow \Phi + \Psi$, $a\Psi$ $(a \in \mathbb{K})$ sind linear.

(Summe von Abb. ist punktweise erklärt!)

Beweis:

(a), (c) ✓

(b) Φ^{-1} bijektiv ✓

Φ^{-1} linear: z.z.: $\underbrace{\Phi^{-1}(ax+by)}_{\in V} = \underbrace{a\Phi^{-1}(x) + b\Phi^{-1}(y)}_{\in V}$;

$a, b \in \mathbb{K}$, $x, y \in W$.

$\Leftrightarrow \Phi(\Phi^{-1}(ax+by)) = \Phi(a\Phi^{-1}(x) + b\Phi^{-1}(y))$

$\Leftrightarrow ax + by = a\Phi(\Phi^{-1}(x)) + b\Phi(\Phi^{-1}(y))$

$\Leftrightarrow ax + by = ax + by$ ✓

Folgerungen:

(a) $\operatorname{Hom}(V, W) := \{\Phi: V \to W \text{ linear}\}$ ist ein $\mathbb{K}$-VR. (w.g. (c))

(UVR von W^V)

(b) $W=V$: $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$ ist $\mathbb{K}$-VR und ein Ring mit 1.
(und $(a\Phi)\circ\Psi = \Phi\circ(a\Psi) = a(\Phi\circ\Psi)$, $a\in\mathbb{K}$, $\Phi,\Psi\in\mathrm{End}\,V$, $\mathbb{K}$-Algebra).

(c) $\mathrm{Aut}(V) := \{\Phi : V\to V \text{ Isomorphismus}\}$ ist eine Gruppe (Automorphismengruppe).

<u>Satz 10:</u>

Seien V, W endl.-dim. $\mathbb{K}$-VRe. Dann gilt:
$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

<u>Beweis:</u>

Seien $x_1,\dots,x_n$ Basis von V, $y_1,\dots,y_m$ Basis von W.
Für $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ setzen wir $\Phi_{ij} : V\to W$ fest durch

$$\Phi_{ij}(x_k) = \begin{cases} 0, & k\neq j \\ y_i, & k=j \end{cases} = \delta_{kj}\cdot y_i$$

δ_{kj}: Kronecker-Symbol

$\Rightarrow$ $m\cdot n$ Abbildungen $\Phi_{ij}\in\mathrm{Hom}(V,W)$. (Nach Satz 4)

Beh.: Die Φ_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ bilden eine Basis von $\mathrm{Hom}(V,W)$. ($\Rightarrow$ paarw. verschieden)

Bew.: 1.) l.u.: Seien $a_{ij}\in\mathbb{K}$ mit $\sum_{i,j} a_{ij}\Phi_{ij} = 0$ ($\to$ Nullabb.)

$$\Rightarrow \Big(\sum_{i,j} a_{ij}\Phi_{ij}\Big)(x_k) = \sum_{i,j} a_{ij}\Phi_{ij}(x_k) = \sum_{i,j} a_{ij}\delta_{jk} y_i$$
$$= \sum_i a_{ik} y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i = 0 \quad (\forall j)$$
$$\underset{y_i \text{ l.u.}}{\Rightarrow} a_{1j},\dots,a_{mj} = 0 \; (\forall j) \Rightarrow a_{ij} = 0 \; (\forall i,j) \checkmark$$

2.) $\{\Phi_{ij}\}$ Erzeugendensystem: Sei $\Phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

$\Rightarrow \Phi(x_k)\in W$ hat Darstellung $\Phi(x_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i$

$\Rightarrow$ Skalare a_{ik}, $i=1,\dots,m$, $k=1,\dots,n$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{i,j} a_{ij}\Phi_{ij}\Big)(x_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i = \Phi(x_k), \; k=1,\dots,n$$
$$\underset{\text{Satz 4}}{\Rightarrow} \Phi = \sum_{i,j} a_{ij}\Phi_{ij} \quad \checkmark$$