LA1-Vorlesung 18.01.2002

Kapitel 3: Lineare Abbildungen

§1 Eigenschaften linearer Abbildungen

Erinnerung:

V, W K-VRe. $\Phi: V \to W$ linear (VR-Homomorphismus)

$\Leftrightarrow \Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y) \quad \forall \alpha, \beta \in K, x, y \in V.$

Varianten:

Φ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Φ linear und bijektiv

Φ Endomorphismus $\Leftrightarrow$ Φ linear und $V = W$

Φ Automorphismus $\Leftrightarrow$ Φ linear, bijektiv und $V = W$

Kern $\Phi = \{x \in V \mid \Phi(x) = 0\}$ UVR von V

Bild $\Phi = \Phi(V) = \{\Phi(x) \mid x \in V\}$ UVR von V

Beispiele:

(a) $A \in K^{m \times n}$, $\Phi: K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$ linear

Kern Φ = Lösungsraum von $Ax = 0$

Bild $\Phi = \{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in K^n\}$

$= [a_1, \dots, a_n]$, $a_1, \dots, a_n$ Spalten von A

(b) $V = \mathbb{R}[x]$, $D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$; $D(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$

lineare Abbildung.

Kern $D = \{$konstante Polynome$\}$

Bild $D = \mathbb{R}[x] \Rightarrow U := [x, x^2, x^3, \dots]$ UVR von $\mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow D|_U : U \to \mathbb{R}[x]$ ist Isomorphismus

$\Rightarrow U \subsetneq \mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R}[x]$

(c) $V = C(0,1) = \{f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig$\}$

$I: C(0,1) \to \mathbb{R}$; $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ linear.

(d) $V = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergent$\}$

$\Phi: V \to \mathbb{R}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{i \to \infty} x_i$ linear.

(e) $V = U \oplus W$, $\pi: V \to V$, $x \mapsto u$ mit $x = u+w$, $u \in U$, $w \in W$.

π ist linear (vergl. Kor. 2.24).

π heißt Projektion auf U, analog ex. Projektion auf W.

<u>Satz 1 (Homomorphiesatz für VRe):</u>

Sei $\Phi: V \to W$ linear. Dann gilt:

(a) Die kanonische Abb. $k: V \to V/_{\text{kern}\,\Phi}$ ist linear.

(b) Es ex. lin. Abb. $\overline{\Phi}: V/_{\text{kern}\,\Phi} \to W$ mit $\Phi = \overline{\Phi} \circ k$.

(c) Ist Φ surjektiv, so gilt $V/_{\text{kern}\,\Phi} \cong W$.

<u>Beweis:</u>

Es fehlt nur noch:

(a) $k(ax) = a[x]_\sim$

(b) $\underbrace{\overline{\Phi}(\underbrace{a[x]_\sim}_{=[ax]_\sim})}_{=\Phi(ax)} = \underbrace{a\overline{\Phi}([x]_\sim)}_{a\Phi(x)}$ ✓

<u>Korollar 2:</u>

$\Phi: V \to W$ linear $\Rightarrow V/_{\text{kern}\,\Phi} \cong \text{Bild}\,\Phi$.

<u>Korollar 3:</u>

$V = U \oplus W \Rightarrow V/_U \cong W$, $V/_W \cong U$.

<u>Bemerkungen:</u>

(a) Die Projektion $\pi: V \to V$, die jedem x die Komponente $u \in U$ (mit $V = U \oplus W$, $x = u + v$) zuordnet, erfüllt $\underset{\pi\circ\pi}{\pi^2} = \pi$ (Idempotenz).

(b) Man nennt eine lineare Abbildung $\pi: V \to V$, die $\pi^2 = \pi$ erfüllt allgemeiner eine Projektion.

Dann gilt: $V = \underbrace{\text{Kern}\,\pi}_{:=W} \oplus \underbrace{\text{Bild}\,\pi}_{:=U}$.

Beweis:

Sei $x \in V. \Rightarrow x = \overbrace{(x - \pi(x))}^{\in \text{Kern}\,\pi} + \overbrace{\pi(x)}^{\in \text{Bild}\,\pi} \Rightarrow \pi(x - \pi(x))$

$= \pi(x) - \pi^2(x) = \pi(x) - \pi(x) = 0$ ✓

Summe ist direkt: Sei $x \in \text{Kern}\,\pi \cap \text{Bild}\,\pi$

$\overset{x \in \text{Kern}\,\pi}{\Rightarrow} \pi(x) = 0$ und $x = \pi(y)$ für ein $y \in V$.

$\Rightarrow x = \pi(y) = \pi^2(y) = \pi(x) = 0$ ✓

Satz 4:

Seien V, V K-VRe, B sei eine Basis von V. Weiter sei $\Phi': B \to W$ eine beliebige Abb. Dann ex. genau eine lineare Abb. $\Phi: V \to W$ mit $\Phi(x) = \Phi'(x)\ \forall x \in B$.

Insbesondere ist jede lineare Abb. $\Phi: V \to W$ durch ihre Werte auf einer Basis $B \subset V$ eindeutig festgelegt.

Beweis:

Jedes $x \in V$ hat ~~eindeutige~~ Darstellung $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ mit $n \in \mathbb{N}, a_i \in K, x_i \in B$.

Setze $\Phi(x) \overset{(*)}{:=} a_1 \Phi'(x_1) + \dots + a_n \Phi'(x_n) \Rightarrow \Phi(x)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Darstellung von x. $\Rightarrow \Phi$ ist linear.

Und $\Phi = \Phi'$ auf B.

Gilt $\Psi: V \to W$ linear, $\Psi = \Phi'$ auf $B \overset{(*)}{\Rightarrow} \Phi = \Psi$

Satz 5:

Sei $\Phi: V \to W$ linear und $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von $V (\Rightarrow \dim V = n)$.

Dann gilt:

(a) Φ injektiv $\Leftrightarrow \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ l.u.

(b) Φ surjektiv $\Leftrightarrow \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ Erzeugendensystem von W.

(c) Φ bijektiv $\Leftrightarrow \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ Basis von W.

Beweis:

(c) folgt aus (a) und (b).

(a) Φ injektiv $\Leftrightarrow [\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0]$

$x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

$\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ l.u. $\Leftrightarrow [\overbrace{a_1 \Phi(x_1) + \dots + a_n \Phi(x_n)}^{= \Phi((a_1 x_1) + (a_n x_n))} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0]$

$\Leftrightarrow [\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0]$