LA1-Vorlesung 11.01.2002

$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

Korollar 20:

$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$

(allg.: $\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$

Bemerkung:

Im Fall $\dim V < \infty$ gilt auch eine „Umkehrung":
Aus $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ folgt Direktheit der Summe $U+W$. (Übungsblatt)

Definition:

Seien U, W UVRe eines $\mathbb{K}$-VR mit $V = U \oplus W$.
Dann heißen U, W komplementär und U heißt Komplementärraum von W (und umgekehrt).

Satz 21:

Jeder UVR $U \subset V$ besitzt einen Komplementärraum W.

Beweis:

Sei B Basis von U. Nach Ergänzungssatz ex. l.u. B', derart dass $B \cup B'$ Basis von V ist.
Setze $W := [B'] \Rightarrow V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.
$\Rightarrow V = U \oplus W$

Beispiel.

$V = \mathbb{R}^5$

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

Vektoren sind l.u., also U Basis und $\dim U = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Füge zwei Vektoren $(5-3=2)$ ein:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{\text{willkürlich}}{W} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

<u>Hinweis:</u>

Im allg. gibt es viele Komplementärräume zu einem geg. UVR $U \subset V$.

<u>Faktorraum:</u>

$\mathbb{K}$-VR V, U UVR von V. $V/_U$ Menge der Äquivalenzklassen $[x]_\sim$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$. $[x]_\sim + [y]_\sim := [x+y]_\sim$

$(V/_U, +)$ abelsche Gruppe. $a \cdot [x]_\sim := [ax]_\sim$ $a \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow$ $V/_U$ mit $+$ mit Skalarmult. $\cdot$ ist ein $\mathbb{K}$-VR. $x' \sim x \Rightarrow ax' \sim ax$

<u>Satz 22:</u>

Sei V $\mathbb{K}$-VR und $U \subset V$ UVR. Dann ist die Faktormenge $V/_U = \{[x]_\sim \mid x \in V\}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{K}$-VR, er heißt Faktorraum (oder Quotientenraum) von V nach U.

Randfälle:
- $U = V \Rightarrow [x]_\sim = V = [0]_\sim \Rightarrow V/_U = \{[0]_\sim\}$
- $U = \{0\} \Rightarrow [x]_\sim = \{x\} \Rightarrow V/_U = \{\{x\} \mid x \in V\} \cong V$.

<u>Satz 23:</u>

Sei V $\mathbb{K}$-VR, $U \subset V$ UVR. Dann gilt:

$\dim U + \dim V/_U = \dim V$.

Beweis:

Sei B Basis von U, ergänze zu einer Basis $B \cup B'$ von V, B' l.u., $B' \cap B = \emptyset$.

Setze $\tilde{B} := \{[x]_\sim \mid x \in B'\}$. Beh.: $\tilde{B}$ Basis von V/U.

(1) Erzeugendensystem: Sei $[x]_\sim \in V/U \Rightarrow x$ hat eine Darstellung $x = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + b_1 y_1 + \dots + b_k y_k$ mit $a_i, b_j \in \mathbb{K}$; $x_i, y_j \in B, B'$

$\Rightarrow [x] = b_1 \underbrace{[y_1]_\sim}_{\in \tilde{B}} + \dots + b_k \underbrace{[y_k]_\sim}_{\in \tilde{B}} \Rightarrow$ Beh.

(2) l.u.: $\left.\begin{array}{l} \underbrace{b_1 \underbrace{[y_1]_\sim}_{\in \tilde{B}} + \dots + b_k \underbrace{[y_k]_\sim}_{\in \tilde{B}}}_{[b_1 \underbrace{y_1}_{\in B'} + \dots + b_k \underbrace{y_k}_{\in B'}]_\sim} = [0]_\sim \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 y_1 + \dots + b_k y_k \in U$

Also $b_1 y_1 + \dots + b_k y_k \in [B']$.

$\Rightarrow b_1 y_1 + \dots b_k y_k = 0 \overset{y_i \text{ l.u.}}{\Rightarrow} b_1 = \dots = b_k = 0 \Rightarrow$ Beh.

Beh: $|\tilde{B}| = |B'|$, denn $y, y' \in B'$, $y \neq y' \Rightarrow [y]_\sim \neq [y']_\sim$

Wäre $[y]_\sim = [y']_\sim \Rightarrow y - y' \in U$ und $y - y' \in [B']$

$\Rightarrow y - y' = 0 \Rightarrow \lightning$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dim V/U = |\tilde{B}| = |B'| = \dim [B'] \\ \overset{\text{Dim-Satz}}{\Rightarrow} \dim U + \dim \underbrace{[B']}_{\text{Komplementärraum } W} = \dim V \end{array}\right\} \Rightarrow$ Beh. Satz

Korollar 24:

Sei U UVR von V und B Basis von U.

(a) Ist $B \cup B'$ Basis von V, $B \cap B' = \emptyset$, so ist $\tilde{B} := \{[x]_\sim \mid x \in B\}$ eine Basis von V/U.

(b) Ist W ein Komplementärraum von U, so gilt $V/U \cong W$.

Beweis:

Die Abb. $\Phi: W \to V/U$, $x \mapsto [x]_\sim$ ist Isomorphismus.

Φ ist linear. ✓ Φ ist injektiv: $\Phi(x) = [0]_\sim \Rightarrow$

$[x]_\sim = [0]_\sim$, d.h. $x \in U$

$\Rightarrow x \in U \cap W \Rightarrow x = 0$.

Φ ist surjektiv: Sei $[x]_\sim \in V/U$ $(x \in V)$.

$\Rightarrow x = y + z$, $y \in U$, $z \in W$

$\Rightarrow [z]_\sim = [x]_\sim \Rightarrow \Phi(z) = [z]_\sim = [x]_\sim$

<u>Beispiel:</u>

$$U = [\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}] \qquad W = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^5$$

Basis von V/U:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U \quad \text{⊸ affine Unterräume}$$