LA1-Vorlesung 09.01.2002

Korollar 17:

Der Lösungsraum von $Ax=0$ hat Dimension $n-\mathrm{Rg}\,A$, für $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$.

Bemerkung:

Jeder ~~Untervektorraumes~~ $U\subset\mathbb{K}^n$ ist Lösungsraum eines geeigneten hom. LGS $Bx=0$, $B\in\mathbb{K}^{m\times n}$ (m geeignet).

Begründung:

~~Sei $U=[y_1,\dots,y_k]$ mit $\dim U=k$ ($\Rightarrow y_1,\dots,y_k$ Basis von U).~~

~~Sei $B=\begin{pmatrix}y_1^T\\ \vdots\\ y_k^T\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{k\times n}$.~~ Zitat: „Nochmal von vorne..."

~~Betrachte LGS $Bx=0$~~

Sei $U=[x_1,\dots,x_r]$ mit $\dim U=r$. ($\Rightarrow x_1,\dots,x_r$ ist also Basis von U.

Sei $A=\begin{pmatrix}x_1^T\\ \vdots\\ x_r^T\end{pmatrix}\Rightarrow A$ hat $\mathrm{Rg}=r$ und $A\in\mathbb{K}^{r\times n}$

Betrachte LGS $Ay=0$. Sei $L_n=[y_1,\dots,y_{n-r}]$ der Lösungsraum von $Ay=0$. Nun sei $B=\begin{pmatrix}y_1^T\\ \vdots\\ y_{n-r}^T\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{n-r\times n}$

$\Rightarrow B$ hat $\mathrm{Rg}=n-r$

$\Rightarrow A\cdot B^T=0\Rightarrow B\cdot A^T=0\Rightarrow B\cdot x_i=0$, $i=1,\dots,r$.

$\Rightarrow U\subset$ Lsg-Raum von $Bx=0$.

Wegen $\dim U=r$ und $\dim(\text{Lsg-Raum von } Bx=0)=n-\mathrm{Rg}B$ $=n-(n-r)=r$.

Anwendung:

Seien $U_1,\dots,U_m\subset\mathbb{K}^n$ UVR'e. Gesucht: Basis von $U_1\cap\dots\cap U_m$? Vor.: $U_1=[x_1^{(1)},\dots,x_r^{(1)}]$, $U_2=[x_1^{(2)},\dots,x_r^{(2)}]$

Beschreibe U_i durch LGS $A^{(i)}x=0\Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_m$ ist dann Lösungsraum von $Ax=0$, wobei $A=\begin{pmatrix}A^{(1)}\\ \vdots\\ A^{(m)}\end{pmatrix}$. [Aufg. 39]

__Beispiel:__

$U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1\\-1\\-1\\-2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\3\\3\\3\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-3\\1\\-2\\4 \end{pmatrix} \right], \quad U_2 = \left[\begin{pmatrix} -1\\0\\-4\\-5\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5\\1\\2\\2\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\-1\\3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\1\\0\\3\\3 \end{pmatrix} \right]$

UVR'e von $\mathbb{R}^5$.

Suche: $U_1 \cap U_2 = ?$ LGS für U_2.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim U_1 = 3 \Rightarrow$ Lsg-Raum L_h ist 2-dimensional.

$L_h = \left[\begin{pmatrix} 2\\-1\\-1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4\\3\\-3\\0\\4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ beschreibt U_1,

also: $\boxed{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}}$

~~Analog:~~

Analog U_2: $-12x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 13x_5 = 0$.

$\Rightarrow U_1 \cap U_2$ Lsg-Raum von: $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_5 &= 0 \\ -12x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 13x_5 &= 0 \end{aligned}$

$\overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \left[\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \right]$

§4 Summen- und Faktorräume

__Definitionen:__

(a) Sei V K-VR und $A_1, \dots, A_k \subset V$, $k \geq 2$.
$A_1 + \dots + A_k := \{x_1 + \dots + x_k \mid x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}$

b) Seien $U_1, \dots, U_k$ UVRe von V, dann heißt die Summe $U_1 + \dots + U_k$ direkt, wenn $U_i \cap \sum_{\substack{j=1\\j \neq i}}^{k} U_j = \{0\}$ für $i = 1, \dots, k$ gilt.

Schreibweise für direkte Summe: $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

Bemerkungen:

(a) $U_1, \ldots, U_k$ UVR'e von $V \Rightarrow U_1 + \cdots + U_k$ UVR von V.

b) $[A_1] + \cdots + [(A_k)] = [A_1 \cup \cdots \cup A_k]$

Satz 18.:

Seien $U_1, U_2, \ldots, U_k$ UVR've von V. Dann gilt:
Summe $U_1 + \cdots + U_k$ direkt $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in U_1 + \cdots + U_k)$ hat eine eindeutige Darstellung $x = x_1 + \cdots + x_m$ mit $x_i \in U_i$ $i = 1, \ldots, k$.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Seien $x = x_1 + \cdots + x_k$ und $x = x_1' + \cdots + x_k'$ zwei Darstellungen von x mit $x_1, x_1' \in U_1, \ldots, x_k, x_k' \in U_k$

$$\Rightarrow (x_1 - x_1') + \cdots + (x_k - x_k') = 0 \Rightarrow \underbrace{-(x_i - x_i')}_{\in U_i} = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (x_j - x_j')}_{\in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} U_j} \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

$$\overset{\text{Summe direkt}}{\Rightarrow} -(x_i - x_i') = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k \Rightarrow x_i = x_i', \, i = 1, \ldots, k$$

„$\Leftarrow$": Sei $y \in U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} U_j \Rightarrow y = y = x_i$ mit $x_i \in U_i$

$y = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} x_j$ mit $x_j \in U_j$ mit $j = 1, \ldots, k;$ $j \neq i$.

$\Rightarrow$ 2 Darstellungen von $y \Rightarrow x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k = 0$, $x_i = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ (Weil $i \in \{1, \ldots, k\}$ beliebig) Summe ist direkt. ∎

Satz 19: (Dimensionssatz)

Seien U, W UVR'e von V. Dann gilt:
$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Beweis:

Aussage ist trivial, wenn $\dim U = \infty$ oder $\dim W = \infty$ ist.

Sei also $\dim U = m < \infty$, $\dim W = n < \infty \Rightarrow \dim(U \cap W) = k$, wobei k natürlich auch $< \infty$.

Sei $x_1, \dots, x_k$ Basis von $U \cap W$. Nach Basisergänzungssatz ex. Basen

$x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m$ von U

$x_1, \dots, x_k, x'_{k+1}, \dots, x_n$ von W

$$\Rightarrow U + W = [\underbrace{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m, x'_{k+1}, \dots, x_n}_{\text{l.u.}}]$$

$$\Rightarrow \dim(U+W) = m + (n-k) = \underset{\dim U}{m} + \underset{\dim W}{n} - \underset{\dim(U \cap W)}{k}$$

$a_1 x_1 + \dots a_m x_m + a'_{k+1} x'_{k+1} + \dots + a'_n x'_n = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 x_1 + \dots + a_m x_m}_{\in U} = \underbrace{-a'_{k+1} x'_{k+1} + \dots + a'_n x'_n}_{\in W}$$

$\Rightarrow a'_{k+1} = \dots = a'_n = 0 \Rightarrow a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0$

$\overset{(\text{l.u.})}{\Rightarrow} a_1, \dots, a_m = 0, \dots, 0$

$\boxtimes$