LA1-Vorlesung 19.12.2001

Beispiel:

$\mathbb{R}^4$, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: A$

$\Rightarrow A$ l. u., weil $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{TNF} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A ist keine Basis, da $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin [A]$

$\Rightarrow B = A \cup \{e_4\}$ ist Basis

Direkt: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{TNF} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Satz 7:

Sei V $\mathbb{K}$-VR und B, B' seien Basen in V.

$\Rightarrow |B| = |B'|$.

Beweis:

1. Fall: $|B| = 0 \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow V = \{0\} \Rightarrow B' = \emptyset \Rightarrow |B'| = 0 = |B|$

Analog: $B' = 0$.

2. Fall: $|B| = k \in \mathbb{N} \overset{\text{Satz 5}}{\Rightarrow} m = |B'| \leq k \overset{\text{Satz 5}}{\Rightarrow} k = |B| \leq m$

$\Rightarrow m = k \Rightarrow |B| = |B'|$. Analog für $|B'| = m \in \mathbb{N}$.

3. Fall: $|B| = \infty$, $|B'| = \infty \Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

Bemerkung:

∞ ist hier ein Symbol mit Rechenregel $\infty + \infty = \infty$;

$a + \infty = \infty \;\; \forall a \in \mathbb{N}_0$.

Frage: Hat jeder VR eine Basis?

Definition:

Sei V $\mathbb{K}$-VR. Gibt ein endliches Erzeugendensystem von V, so heißt V endlichdimensional, Schreibweise $\dim V < \infty$.

Ist jedes Erzeugendensystem unendlich, so heißt V unendlichdimensional, Schreibweise $\dim V = \infty$.

Satz 8:

Sei V $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V < \infty$ und sei $A \subset V$ Erzeugendensystem. Dann ex. eine endliche Menge $B \subset A$, die Basis von V ist.

Beweis:

Es gibt in A eine endliche Teilmenge $\tilde{A}$, die $[\tilde{A}] = V$ erfüllt: Wegen $\dim V < \infty$ gibt es eine endliche Menge A' mit $[A'] = V$,

$A' = \{x_1, \dots, x_m\} \Rightarrow \exists$ Darst. $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^{(i)}$, $y_j^{(i)} \in A$.

$\Rightarrow A' \subset [\underbrace{y_1^{(1)}, \dots, y_{k_1}^{(1)}, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_{k_m}^{(m)}}_{\subset A}]$

$\Rightarrow \underbrace{[A']}_{V} \subset [\dots] \subset V$

$\Rightarrow \tilde{A} = \{y_1^{(1)}, \dots, y_{k_1}^{(1)}, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_{k_m}^{(m)}\} \subset A$ und Erzeugendensystem

Sei jetzt $|\tilde{A}| = r$. Entweder ist $\tilde{A}$ minimal ($\Rightarrow \tilde{A}$ Basis) oder nicht minimal ($\Rightarrow \exists$ Teilmenge $\tilde{\tilde{A}} \subsetneq \tilde{A}$ mit $[\tilde{\tilde{A}}] = V$) usw.

Nach spätestens k Schritten ist eine Teilmenge B von $\tilde{A}$ gefunden, die $[B] = V$ erfüllt und minimal ist. $\Rightarrow B$ Basis von V. ∎

Korollar 9:

Sei V $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V < \infty$. Sei B Basis und $\mathcal{B}'$ Erzeugendensystem mit $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}|$. Dann ist auch $\mathcal{B}'$ eine Basis.

Beweis:

Nach Satz 8 ex. $\overset{\text{endl.}}{\tilde{\mathcal{B}}} \subset \mathcal{B}'$, $\tilde{\mathcal{B}}$ Basis $\overset{\text{Satz 7}}{\Rightarrow} |\tilde{\mathcal{B}}| = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ (alles endlich). $\Rightarrow \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \Rightarrow$ Beh. ∎

Definition:

Sei $\dim V < \infty$. Die Anzahl $|\mathcal{B}|$ der Elemente einer Basis von V heißt Dimension von V, Schreibweise: $\dim V = k$ (wenn $|\mathcal{B}| = k$). $\dim V \in \mathbb{N}_0$.

Satz 10: (Basisergänzungssatz)

Sei V $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V < \infty$. Sei $A \subset V$ linear unabhängig. Dann ex. eine (endliche) Menge $\mathcal{B} \supset A$, die Basis von V ist.

Beweis:

Sei $\dim V = n \in \mathbb{N}$ (der Fall $\dim V = 0$, d.h. $V = \{0\}$, ist trivial). $\Rightarrow |A| \leq n \Rightarrow$ entweder A maximal ($\Rightarrow A$ Basis) oder es ex. Obermenge A' mit $A' \neq A$ und A' l.u. $\Rightarrow$ wegen $|A'| \leq n$ endet dieses Verfahren nach höchstens n Schritten mit einer maximalen l.u. Menge $\mathcal{B} \supset A$. $\overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow} \mathcal{B}$ ist Basis von V. ∎

Korollar 11:

Sei V $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V < \infty$, $\mathcal{B}$ Basis und $\mathcal{B}'$ l.u. mit $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| \Rightarrow \mathcal{B}'$ Basis von V.

Beweis:

Nach Satz 10 ex. Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ mit $\tilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}'$. $\Rightarrow |\tilde{\mathcal{B}}| = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ endl. $\Rightarrow \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}'$ ∎

Bemerkungen:

(a) Sätze 8+10 gelten analog auch für beliebige VR.

(b) Jeder VR besitzt eine Basis (folgt aus (a)).

Beweis von Satz 10 (allg.) mit Zorn'schem Lemma:

Idee: Sei $A \subset V$ l.u.. Betrachte $\mathcal{M} := \{ M \in V \mid M \supset A, M \text{ l.u.} \}$.

$\Rightarrow \mathcal{M} \neq \emptyset$ wegen $A \in \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ ist bezgl. $\subset$ geordnet.

Jede total geordnete Teilmenge $\bar{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ besitzt ein maximales Element: $\bar{M} = \bigcup_{M \in \bar{\mathcal{M}}} M$ $\quad (\bar{M} \in \mathcal{M})$

Hierzu muß gez. werden, dass $\bar{M}$ l.u. ist.

$\overset{\text{Zorn}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{M}$ besitzt ~~maximales~~ größtes Element B

$\Rightarrow B$ ist Basis von V, $B \supset A$.