LA1-Vorlesung 12.12.2001

Satz 4:

Sei $A \subset V$, $A \neq \emptyset \Rightarrow [A] = \{$ Linearkombinationen von Vektoren aus $V \} =: W$

Korollar 3:

Der Durchschnitt von (beliebig vielen) Untervektorräumen ist ein Untervektorraum von V.

Beweis (zu Satz 4):

Es gilt $A \subset [A]$. Weil alle Linearkombinationen von Vektoren aus A in jedem UVR liegen, der A enthält, folgt $W \subset [A]$. Umgekehrt ist ~~wegen $A \subset [A]$ auch $W \subset [A]$~~ W ein UVR, der A enthält. $\Rightarrow [A] \subset W$. $\blacksquare$

Beispiele:

(a) $[\emptyset] = \{0\}$ Nullraum

$[V] = V$

$[x] = \{ax \mid a \in K\}$, $x \in V$

(b) Ist L_h die Lösungsmenge eines homogenen (nicht-trivialen) LGS: $L_h = \{s_1 y_1 + \dots + s_r y_r \mid s_1, \dots, s_r \in K\} = [y_1, \dots, y_r]$

(c) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ UVR von $\mathbb{R}^4$

§2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definition:

Seien $x_1, \dots, x_k \in V$, $k \in \mathbb{N}$, Vektoren. Dann heißen $x_1, \dots, x_k$ linear abhängig (kurz: l.a.), wenn es Skalare $a_1, \dots, a_k \in K$ gibt, die nicht alle Null sind und die $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = 0$ erfüllen.

$x_1,\dots,x_k$ heißen linear unabhängig (kurz: l.u.), wenn aus $a_1x_1+\dots+a_kx_k=0$ immer $a_1=\dots=a_k=0$ folgt.

Bemerkung:

(a) Vektoren $x_1,\dots,x_k\in V$ sind entweder l.a. oder l.u..
(l.a. und l.u. sind Eigenschaften der $\mathbb{K}$-Vektoren $x_1,\dots,x_k$ und nicht einzelner Vektoren!)

(b) Ein Vektor $x\in V$ (Fall $k=1$) ist l.a. $\Leftrightarrow x=0$

(c) $x_1,\dots,x_k$ l.a. $\Leftrightarrow$ Einer der Vektoren x_i ist Linearkombination der anderen!

Zwischenbetrachtung:

Seien $x_1,\dots,x_k\in V$ und $y_1,\dots,y_m\in V$ seien Linearkombinationen der x_i: $y_1=a_{11}x_1+\dots+a_{k1}x_k,\dots,$
$y_m=a_{1m}x_1+\dots+a_{km}x_k$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_j b_j\Big(\sum_i a_{ij}x_i\Big) = \sum_i\Big(\sum_j b_j a_{ij}\Big)x_i \qquad (*)$$

(d) Seien jetzt $x_1,\dots,x_k$ l.u. und $y_1,\dots,y_m$ Linearkomb.
Seien weiter $\bar{y}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{k1}\end{pmatrix},\dots,\bar{y}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\ \vdots\\ a_{km}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^k$

Dann gilt: $y_1,\dots,y_m$ l.u. $\Leftrightarrow \bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m$ l.u.

Beweis: Nach (*) gilt: $\sum_{j=1}^m b_j y_j=0 \Leftrightarrow \sum_i\Big(\sum_j b_j a_{ij}\Big)x_i=0$
$\overset{x_1,\dots,x_k \text{ l.u.}}{\Longleftrightarrow} \sum_j a_{ij}b_j=0,\ i=1,\dots,k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m b_j\bar{y}_j=0$ ✓

Satz 5:

Seien $x_1,\dots,x_k\in V$ und $y_1,\dots,y_m$ Linearkombinationen der x_i. Gilt $m\geq k+1$, so sind $y_1,\dots,y_m$ l.a.

Beweis:

Das LGS
$$\begin{aligned} b_1a_{11}+\dots+b_ma_{1m}&=0\\ &\ \vdots\\ b_1a_{k1}+\dots+b_ma_{km}&=0\end{aligned}$$

(in den $b_1, \dots, b_m$ als Variablen) hat nach Satz 1.18 eine nichttriviale Lösung $(b_1, \dots, b_m)$.

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$$

Beispiele:

(a) $V = \mathbb{R}^4$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren l.a. oder l.u.?

$$b_1 x_1 + \dots + b_4 x_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hat das LGS eine nicht-triviale Lsg $(b_1, \dots, b_4)$?

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) \\ -3 \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-\tfrac{1}{2}) \\ -5 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nicht-trivial lösbar} \Rightarrow x_1, \dots, x_4 \text{ l.a.}$$

(b) Seien $x_1, \dots, x_4$ l.u. Vektoren in einem $\mathbb{R}$-VR V.

Sei
$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 &= -4x_1 - 2x_2 + 4x_4 \\ y_3 &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 \\ y_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

$y_1, \dots, y_4$ l.a. oder l.u.?

$v_1, \dots, v_4$ l.u $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ l.u.

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -7/10 & -3/10\\ 0 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Nur trivial lösbar}$$

$\Rightarrow$ l.u. !

(c) Im K^n sind die Vektoren (Standard-Einheitsvektoren

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ l.u.

$$\Rightarrow a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$