LA1-Vorlesung 07.12.2001

Kap. 2 Vektorräume

§1 Vektorräume und Untervektorräume

$\mathbb{K}$ Körper.

Definition:

Eine Menge V mit einer „inneren" Verknüpfung $+: V\times V \to V$ und einer sog. „äußeren" Verknüpfung $\cdot : \mathbb{K}\times V \to V$ heißt Vektorraum über $\mathbb{K}$ (oder $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K}$-Vektorraum, VR), wenn gilt:

(a) $(V,+)$ ist abelsche Gruppe

(b) $a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y \quad \forall a\in\mathbb{K};\ x,y\in V$

(c) $(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x \quad \forall a,b\in\mathbb{K};\ x\in V$

(d) $(a\cdot b)\cdot x = a\cdot(b\cdot x) \quad \forall a,b\in\mathbb{K};\ x\in V$

(e) $1\cdot x = x \quad \forall x\in V$

Die Elemente von V heißen Vektoren, insbesondere heißt das Neutralelement bezgl. $+$ Nullvektor $\mathcal{O}$.

Eine Teilmenge $U\subset V$ eines VR V heißt Untervektorraum (von V), wenn U mit den auf $U\times U$ bzw. $\mathbb{K}\times U$ eingeschränkten Abbildungen $+$ und $\cdot$ wieder ein $\mathbb{K}$-VR ist.

Sind V, W $\mathbb{K}$-VR, so heißt eine Abb. $\Phi: V\to W$ VR-Homomorphismus (oder lineare Abb.), wenn

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x+y) &= \Phi(x)+\Phi(y) \\ \Phi(a\cdot y) &= a\cdot\Phi(y) \end{aligned}\right\} \forall a\in\mathbb{K};\ x,y\in V$$

gilt.

Satz 1:

Sei V $\mathbb{K}$-VR. Dann gilt:

(a) $\underset{\in\mathbb{K}}{0}\cdot x = \underset{\in V}{\mathcal{O}} \quad \forall x\in V$

(b) $a \cdot \overset{\in V}{\mathcal{O}} = \overset{\in V}{\mathcal{O}} \quad \forall a \in \mathbb{K}$

(c) $ax = \mathcal{O} \Rightarrow a = 0$ oder $x = \mathcal{O}$ (oder beides)

(d) $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in V$

Beweis:

(b) $a \cdot \mathcal{O} = a \cdot (\mathcal{O} + \mathcal{O}) \overset{Ax.b)}{=} a \cdot \mathcal{O} + a \cdot \mathcal{O} \overset{\text{Satz 1 Kap 1}}{\Rightarrow} a \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

(a) $0 \cdot x = (0+0) \cdot x \overset{Ax.c)}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x \overset{\text{Satz 1 Kap 1}}{\Rightarrow} 0 \cdot x = \mathcal{O}$

(c) $a \cdot x = \mathcal{O}$. Sei $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1}(a \cdot x) = a^{-1} \cdot \mathcal{O}$.

$\underset{\text{Auss b)}}{\overset{Ax.d)}{\Rightarrow}} \underbrace{(a^{-1} \cdot a)}_{1} x = \mathcal{O} \overset{Ax.e)}{\Rightarrow} x = \mathcal{O}$

(d) $\underbrace{0 \cdot x}_{\mathcal{O}} \overset{a)}{} = (1-1) \cdot x \overset{Ax.c)}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \overset{Ax.e)}{=} x + (-1)x$

$\Rightarrow (-1) \cdot x = -x$

Beispiele:

(a) $V = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x \in \mathbb{K}\}, n \in \mathbb{N}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation:

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$a \cdot (x_1, \dots, x_n) := (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)$

$\Rightarrow \mathbb{K}^n$ ist $\mathbb{K}$-VR. ($n = 1 \Rightarrow \mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}$-VR)

(b) $V = \mathbb{K}^{m \times n}$ ((m,n)-Matrizen) ist ein $\mathbb{K}$-VR.

(entspricht „im Prinzip" $\mathbb{K}^{m \cdot n}$)

Speziell: $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{n \times 1}, \mathbb{K}^{1 \times n}$ sind alle „im Prinzip" gleich.

Verabredung:

Wir identifizieren $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{n \times 1}$, d.h. $(x_1, \dots, x_n)$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ wird als gleich angesehen.

Aber: $(x_1 \cdots x_n)$ wird von $(x_1, \dots, x_n)$ unterschieden!

(c) $\mathbb{K}[x]$ ist $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (VR aller Folgen in $\mathbb{K}$) ist $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K}[x]$ ist UVR v. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(d) Sei $A \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{K}^A := \{f : A \to \mathbb{K}\}$ mit $+$ und $\cdot$:

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \text{für alle } x \in A,\ f, g \in \mathbb{K}^A \\ (a \cdot f)(x) &= a \cdot f(x) \quad \text{für alle } x \in A,\ a \in \mathbb{K} \end{aligned}\right\} \mathbb{K}^A \text{ ist } \mathbb{K}\text{-VR}$$

(e) $V = C(0,1)$ stetige Funktionen auf $C(0,1)$ ist $\mathbb{R}$-VR.

<u>Satz 2:</u> (UVR-Kriterium)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $U \subset V$. Dann gilt:

U UVR von V $\Leftrightarrow$ $U \neq \emptyset$ und mit $x, y \in U$, $a \in \mathbb{K}$ immer $x + y \in U$, $ax \in U$ gilt.

$\Leftrightarrow$ $x, y \in U$; $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow ax + by \in U$

<u>Beispiele:</u>

(a) V $\mathbb{K}$-VR $\Rightarrow$ Triviale Untervektorräume V und $\{0\}$,
$\{0\}$ ist kleinster UVR (Nullraum).

(b) Homogenes LGS: $Ax = 0$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$.
$\Rightarrow$ Lösungsmenge L_h ist UVR von $\mathbb{K}^n$.

(c) $U = \{f \in C(0,1) \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$ ist UVR. Aber
$\{f \in C(0,1) \mid f(\frac{1}{2}) = 1\}$ ist <u>kein</u> UVR.

(d) Sei $\Phi: V \to W$ lineare Abb.
$\text{Kern}\, \Phi := \{x \in V \mid \Phi(x) = 0\}$ UVR von V.
$\text{Bild}\, \Phi := \{\Phi(x) \mid x \in V\}$ UVR von W.

<u>Definition und Bemerkung:</u>

Sei $A \subset V$ beliebige Menge, V $\mathbb{K}$-VR.
Setze $[A] := \bigcap\limits_{\substack{U \text{ UVR von } V \\ \text{mit } A \subset U}} U$. Dann ist $[A]$ ein UVR von V,
$[A]$ heißt dann lineare Hülle von A. ~~A heißt~~
Ist U UVR von V und A derart, dass $U = [A]$, so heißt $[A]$ Erzeugendes System von U. Ist $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreiben wir statt $[A]$ auch $[x_1, \dots, x_n]$.

<u>Definition:</u>

~~Sei~~ Ein Vektor der Form $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, $a_i \in \mathbb{K}$, $x_1, \dots, x_n \in V$ heißt

Linearkombination von $x_1, \ldots, x_n$.

<u>Satz 4:</u>

Ist $A \subset V$, $A \neq \emptyset$. Dann ist $[A]$ die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus A:

$$[A] = \{ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \mid a_i \in \mathbb{K}, x_i \in A, n \in \mathbb{N} \}$$