A 1- Vorlesung 05.12.2001

$a = -1$:

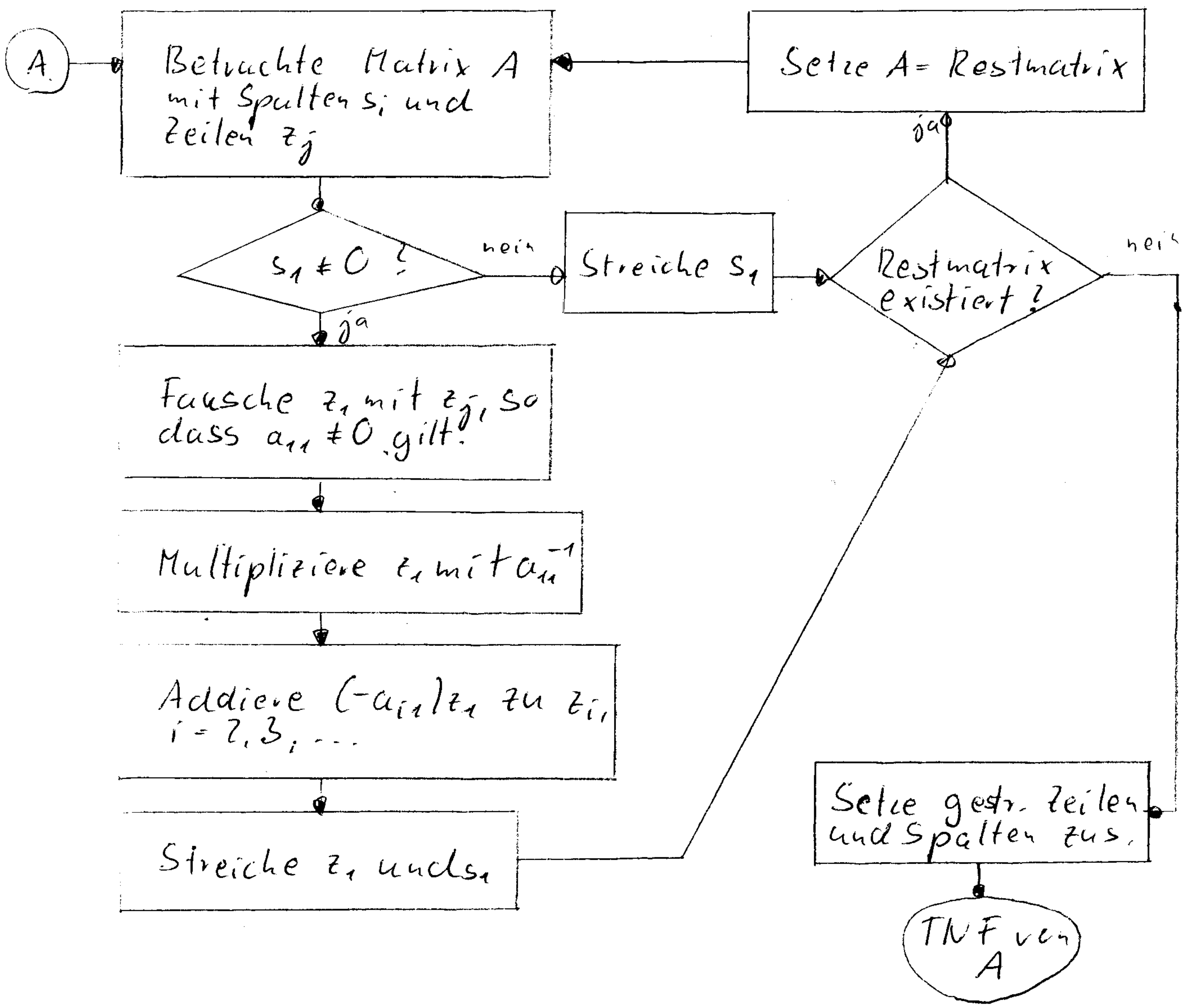
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1 \\ +1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Gaußsche Normalform (GNF)

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Der Gaußsche Algorithmus



Treppennormalform der Matrix A

$$
\left.\left(\begin{array}{cccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & & & & & \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & * & & * & \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 & * & & \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & \\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 & * & \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0
\end{array}\right)\right.
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} m-k \end{array}
$$

Gaußsche Normalform von A

$$
\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots & * \\
0 & \cdots & & & 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots & & * & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 & * & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & 0 & * \cdots * & 0 & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0\ 1 & * \cdots * & 0 & & \\
0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0\ 1 & * \cdots & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} m-k \end{array}
$$

Anwendung auf LGS:

$Ax = b \Rightarrow (A|b) \to$ Gauß-Algo.

„TNF" $\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & \cdots & 0\ 1 & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & \cdots & & 0\ 1 & * \cdots & * & c_2 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & 0\ 1\ * \cdots & * & c_k \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & c_{k+1} \\
\vdots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & c_m
\end{array}\right)$

LGS lösbar

$\Leftrightarrow c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$

GNF (falls $c_{k+1} = \dots = c_m$)

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots & * & d_1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots & * & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \cdots & & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\ 1 & * \cdots & * & d_k \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ die „Basisvariablen".

$x_j,\ j \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ ($n-k$) können frei gewählt werden.

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $L = \{c_0 + s_1 c_1 + \dots + s_{n-k} c_{n-k} \mid s_1, \dots, s_{n-k} \in \mathbb{K}\}$

$$c_0 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \\ 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j_1 \\ \\ \\ \leftarrow j_2 \\ \\ \leftarrow j_k \\ \\ \end{array}$$

(Also in der j_i-ten Zeile steht der Eintrag d_i, sonst nur 0).

Satz 18:

Ein homogenes LGS $Ax = 0$ mit mehr Unbekannten als Gleichungen ist immer nicht trivial lösbar.

Bew.:

$A \in \mathbb{K}^{m \times n} \Rightarrow n > m \Rightarrow n-k > m-k \geq 0$

Anwendung auf Matrizen zur Bestimmung von Regularität.

Satz 19:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Hat $(A \mid E_n)$ die GNF $(E_n \mid A')$, so ist A regulär und A' ist die Inverse von A.

Bew.:

$AX = E_n$ mit $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Sei $A' = (a_1' \vdots \cdots \vdots a_n')$, $X = (x_1 \vdots \cdots \vdots x_n)$, $E_n = (e_1 \vdots \cdots \vdots e_n)$. Dann ist $AX = E_n$ äquivalent zu $Ax_1 = e_1, \dots, Ax_n = e_n$.

Gauß auf $(A \mid E_n)$ entspricht also der simultanen

Anwendung auf die erw. Matrizen $(A|e_1), \dots, (A|e_n)$.
Hat $(A|E_n)$ die GNF $(E_n|A')$, so hat $(A|e_1)$ die GNF $(E_n|a_1'), \dots, (A|e_n)$ hat die GNF $(E_n|a_n')$.

$\Rightarrow$ $Ax_1 = e_1$ hat die eindeutige Lsg. $x_1 = a_1', \dots,$
$Ax_n = e_n$ hat die eindeutige Lsg $x_n = a_n'$

$\Rightarrow A \cdot A' = E_n \quad (1)$

Jetzt wird der Gauß-Algo. „rückwärts angewendet".

$\Rightarrow$ Dann geht die Matrix $(A'|E_n)$ über in $(E_n|A)$.

$\overset{\text{wie}}{\underset{\text{oben}}{\Rightarrow}} A' \cdot A = E_n \quad (2)$

(1) und (2) $\Rightarrow A' = A^{-1}$ $\blacksquare$

__Beispiel:__

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&2&1&0&1&0&0\\ 0&-1&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&-1&1&0&0\\ 0&-1&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&-1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&-1&1&1&0\\ 0&0&-1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&-1&1&1&0\\ 0&0&0&2&-2&1&1&1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&1&1&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&-1&0\\ 0&1&0&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

__Bemerkungen:__

(a) Ist A regulär, so ist $Ax = b$ eindeutig lösbar und $x = A^{-1}b$ ist die Lösung.

(b) Ist $Ax = b$ lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form $L = \{\tilde{x} + L_h\} := \{\tilde{x} + y \mid Ay = 0\}$
y ist Lsg des homogenen Systems.

(c) Eine obere Dreiecksmatrix ist regulär $\Leftrightarrow$ alle Diagonalelemente $\neq 0$. Dann ist A^{-1} obere Dreiecksmatrix. Auch das Produkt von oberen Dreiecksmatrizen ist obere Dreiecksmatrix.

$\Rightarrow$ Die regulären oberen Dreiecksmatrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$. Gleiches gilt natürlich auch für die unteren Dreiecksmatrizen.