LA1-Vorlesung 30.11.2001

Beispiel:

$p = 1 + x^2$

$\mathbb{R}[x]$: keine Nullstelle

$\mathbb{F}_2[x]$: Nullstelle $x = 1 \Rightarrow p = (1+x)^2$

$\mathbb{C}[x]$: 2 Nullstellen : $x = i,\ x = -i \Rightarrow p = (x+i)(x-i)$

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes $p \in \mathbb{C}[x]$ besitzt eine Nullstelle.

Folgerung: Jedes $p \in \mathbb{C}[x]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Definition:

Ist $p = r \cdot q$; $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$, so heißen q, r Teiler von p.

Zwei Polynome p, q heißen teilerfremd, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler vom Grad ≥ 1 haben.

Bemerkung:

p, q teilerfremd $\Rightarrow p \neq 0$ oder $q \neq 0$

Satz 16:

Seien $p, q \in \mathbb{K}[x]$. Dann gilt:

p, q teilerfremd $\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{K}[x]$ mit $pr + qs = 1$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Seien p, q teilerfremd. Betrachte $I := \{pr + qs \mid r, s \in \mathbb{K}[x]\}$

$\Rightarrow I$ ist UG der additiven Gruppe $\mathbb{K}[x]$

Ist $pr + qs \in I$ und $t \in \mathbb{K}[x]$, so ist $t(pr+qs) \in I$.

($\Rightarrow I$ ist ein Ideal)

Beh.: $1 \in I$. Sei $\tilde{t}$ ~~das~~ ein normiertes Polynom kleinsten Grades in I. Sei $t \in I$. Division mit Rest ergibt

$t = \tilde{t}s + r$, $s, r \in \mathbb{K}[x]$, Grad $r <$ Grad $\tilde{t}$.

$\Rightarrow r = t + \tilde{t}(-s) \in I \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow$ Alle $t \in I$ sind von der Form $t = \tilde{t}s$, $s \in \mathbb{K}[x]$.

$\Rightarrow$ $p = \tilde{t} \cdot s_1$, $q = \tilde{t} \cdot s_2$.

$\overset{p,q \text{ teilerfremd}}{\Rightarrow}$ $\tilde{t} = 1 \Rightarrow$ Beh.

„$\Leftarrow$": $pr + qs = 1$. Angen. p, q haben Teiler t: $p = t \cdot \tilde{p}$, $q = t \cdot \tilde{q}$.

$\Rightarrow$ $t(\tilde{p}r + \tilde{q}s) = 1 \Rightarrow$ Grad $t = 0 \Rightarrow t$ Konstante.

$\Rightarrow$ p, q teilerfremd.

<u>Bemerkung:</u>

$p_1, \ldots, p_k, q \in \mathbb{K}[x]$, p_i, q sind teilerfremd, $i = 1, \ldots, k$.

$\Rightarrow$ $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, q teilerfremd.

<u>Beweis:</u>

Fall $k = 2$: p_1, q teilerfremd, p_2, q teilerfremd.

$\overset{\text{Satz 16}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Darstellungen $p_1 r_1 + q s_1 = 1$, $p_2 r_2 + q s_2 = 1$ mit $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{K}[x]$.

$\Rightarrow (p_1 p_2)(r_1 r_2) + q(p_1 r_1 s_2 + p_2 r_2 s_1 + q s_1 s_2) = 1$

$\overset{\text{Satz 16}}{\Rightarrow}$ $p_1 p_2, q$ teilerfremd.

Darstellung aus Satz 16 lässt sich mit dem Euklidischen Algorithmus finden:

<u>Beispiel:</u>

$p = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 4$, $q = x^2 + 1$

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 4) : (x^2 + 1) = x^3 + x - 3 \\
\underline{-x^5 - x^3} \\
\quad x^3 - 3x^2 \\
\quad \underline{-x^3 \qquad\quad - x} \\
\qquad -3x^2 - x + 4 \\
\qquad \underline{+3x^2 \qquad + 3} \\
\qquad\qquad -x + 7
\end{array}
$$

$\Rightarrow p = \underbrace{(x^3 + x - 3)}_{s_1} q + \underbrace{(-x + 7)}_{r_1}$

2. Schritt: $q = s_2 r_1 + r_2$

$= (-x + 7) r_1 + 50$

$50 = q - s_2 r_1 = q - s_2(p - s_1 q) = -s_2 p + (1 + s_2 s_1) q$

$\Rightarrow 50 = (x + 7)p + (1 + (x^3 + x - 3)(-x + 7))q$

§5 Der Gaußsche Algorithmus

LGS:
$$\boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}} \quad \left.\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{array}\right\} \text{Zeilen des LGS}$$

mit $a_{ij}, b_j \in \mathbb{K}$.

$$\|$$

Matrixschreibweise: $\boxed{Ax = b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{array}\right\} \text{Zeilen der erw. Matrix}$$

<u>Zulässige Zeilenoperationen:</u> (elementare Umformungen)

(a) Tausch von zwei Zeilen:

$z_i \leftrightarrow z_j$

(b) Multiplikation mit $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$

$z_i \longrightarrow c \cdot z_i$

(c) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen:

$z_i \longrightarrow z_i + c \cdot z_j$, $c \in \mathbb{K}$.

<u>Satz 17:</u>

Elementare Zeilenumformungen verändern die Lösungsmengen eines LGS nicht.

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & -8x_2 & +3x_3 & -3x_4 & +x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & -x_4 & +4x_5 & = & -3 \\ x_1 & -2x_2 & & -3x_4 & +4x_5 & = & a \end{array} \quad , a \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} -4 \\ 2 \\ -1 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ |\cdot(-\tfrac{1}{3}) \quad 1 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & a-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right)$$

Treppennormalform (TNF) von $(A|b)$.