LA1-Vorlesung 28.11.2001

$\mathbb{K}[x]$ Menge der Polynome (über $\mathbb{K}$), $p, q \in \mathbb{K}[x]$,

$p := (a_0, a_1, \dots, a_m, 0, \dots)$, $q = (b_0, b_1, \dots, b_n, 0, \dots)$

$p + q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$

$\Rightarrow$ $(\mathbb{K}[x], +)$ abelsche Gruppe!

$p \cdot q := (c_0, c_1, \dots)$ mit $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$, $i = 0, 1, \dots$

Produktbildung von Polynomen entspricht der Multiplikation in $\mathbb{K}$, wenn wir $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ schreiben und mit $x$ formal wie mit einem Element von $\mathbb{K}$ rechnen.

$pq = (\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$ mit $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$,

speziell $c_{m+n} = a_m b_n$.

$\Rightarrow$ • erfüllt Assoziativgesetz, Kommutativgesetz und Distributivgesetz.

Denn: $p = (a_0, a_1, \dots)$, $q = (b_0, b_1, \dots)$, $r = (c_0, c_1, \dots)$

i-te Komponente von $(p \cdot q) \cdot r$: $\sum_{k=0}^{i} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) c_{i-k}$

$= \sum_{\substack{0 \le j \\ \le k \le i}} a_j b_{k-j} c_{i-k} = \sum_{j=0}^{i} \left( \sum_{k=j}^{i} b_{k-j} c_{i-k} \right) a_j$ $[k - j \to l]$

$= \sum_{j=0}^{i} \underbrace{\left( \sum_{l=0}^{i-j} b_l c_{i-j-l} \right)}_{\substack{(i,j)\text{te Komp.} \\ \text{von } q \cdot r}} a_j$ = i-te Komponente von $p(q \cdot r)$

Neutralelement bezgl. • ist $(1, 0, 0, \dots)$

## Satz 12:

$(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

## Bemerkung und Definition:

Ist $p = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ mit $a_m \neq 0$, so heißt $m$ der Grad von $p$, $a_m$ heißt Teilkoeffizient.

Schreibweise: Grad $p = m$. Wir setzen Grad $0 = -1$.

($\Rightarrow$ Grad $p = 0 \Rightarrow p$ Konstante $\neq 0$)

Es gilt: $\text{Grad}(p \cdot q) = \text{Grad}\, p + \text{Grad}\, q$ (falls $p, q \neq 0$)
$\text{Grad}(p + q) \leq \max(\text{Grad}\, p, \text{Grad}\, q)$

<u>Bemerkung:</u>

Zu jedem $p \in \mathbb{K}[x]$ gehört eine Funktion $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ (wenn $p = a_0, a_1, \dots$), sie heißt Polynomfunktion. Die Menge der Polynomfunktionen ist mit punktweiser Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins. Die Abbildung $p \mapsto f_p$ ist ein Ringhomomorphismus, sie ist surjektiv aber i. allg. nicht injektiv.
(Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist die Abb. auch injektiv, dann muß man Polynome und Polynomfkt. nicht unterscheiden.)

<u>Bemerkung:</u>

$\mathbb{K}[x]$ ist kein Körper.

$p = x \Rightarrow \exists$ kein $q$ mit $p \cdot q = \overset{\text{Grad } 1 = 0}{1}$, denn $\text{Grad}(p \cdot q) = \underbrace{\text{Grad}\, p}_{=1} + \underbrace{\text{Grad}\, q}_{\geq 0}$
$\Rightarrow \text{Grad}(p \cdot q) \geq 1$ ↯

<u>Satz 14:</u>

Seien $p, q \in \mathbb{K}[x]$, $q \neq 0$. Dann ex. $r, s \in \mathbb{K}[x]$ mit $p = q \cdot s + r$ und $\text{Grad}\, r < \text{Grad}\, q$. $r, s$ eindeutig.

<u>Beweis:</u>

1. Fall: $\text{Grad}\, p < \text{Grad}\, q \Rightarrow s = 0$, $r = p$ erfüllt die Beh.

2. Fall: $\text{Grad}\, p \geq \text{Grad}\, q$: Vollst. Induktion n. $\text{Grad}\, p = k$.

$k = 0$: $\Rightarrow p = a_0$, $q = b_0$, $b_0 \neq 0$. $\Rightarrow p = \underbrace{\frac{a_0}{b_0}}_{:= s} \cdot q + \underbrace{0}_{:= r}$

$k - 1 \to k$: Sei $\text{Grad}\, p = k$, $p = a_0 + \dots + a_k x^k$
$q = b_0 + \dots + b_m x^m$, $m \geq 0$, $b_m \neq 0$

Setze $\tilde{p} := p - \frac{a_k}{b_m} x^{k-m} \cdot q \in \mathbb{K}[x]$

$\Rightarrow$ Grad $\tilde{p} < k$

Damit folgt: $\tilde{p} = \tilde{s} \cdot q + \tilde{r}$ mit Grad $\tilde{r} <$ Grad $q$.

(entweder aus IA, falls Grad $\tilde{p} \geq$ Grad $q$; oder wie im 1. Fall, wenn Grad $\tilde{p} <$ Grad $q$ ist).

$\Rightarrow p = (\underbrace{\tilde{s} + \frac{a_k}{b_m} x^{k-m}}_{:=s} \cdot q + \underbrace{\tilde{r}}_{:=r}) \Rightarrow$ Beh. ▨

Eindeutigkeit: Aus $p = sq + r$, $p = \tilde{s}q + \tilde{r}$, Grad $r$ = Grad $q$, Grad $\tilde{r} <$ Grad $q$. $\Rightarrow (s - \tilde{s})q = \tilde{r} - r$. Nun: Grad $(s-\tilde{s})q$ = Grad $(s - \tilde{s})$ + Grad $q$ (falls $s - \tilde{s} \neq 0$) $\geq$ Grad $q$

Aber: Grad$(\tilde{r} - r) \leq \max($Grad $\tilde{r}$, Grad $r) <$ Grad $q$.

$\Rightarrow \tilde{s} - s = 0$, d.h. $\tilde{s} = s \Rightarrow \tilde{r} = r$. ✓

**Definition:**

Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ und $c \in \mathbb{K}$. $c$ heißt Nullstelle von $p$, wenn $p(c) = 0$.

Polynomfunktion!

**Korollar 15:**

Genau dann ist $c$ Nullstelle von $p$, wenn es eine Darstellung $p = \underbrace{(x-c)}_{\text{Linearfaktor}}\tilde{p}$ mit $\tilde{p} \in \mathbb{K}[x]$ gibt.

**Beweis:**

Nach Satz 14 ex. Darstellung $p = (x-c)\tilde{p} + r$, mit $c$ Nullstelle von $p$. Grad $r <$ Grad $(x-c) = 1$

$\Rightarrow r = a_0 \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow p(c) = ((c-c) \cdot \tilde{p}(c)) + r(c) = r(c) = a_0$

$\Rightarrow a_0 = 0$ ✓ ▨

Umgekehrt sei $p = (x-c)\tilde{p} \Rightarrow p(c) = 0$ ✓

Bemerkung:

(a) Es gibt höchsens Grad $p$ Nullstellen von $p$.

(b) Sind $p, q \in \mathbb{R}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}[x]$) verschieden, so sind auch ihre Polynomfunktionen $p()$, $q()$ verschieden.

$p(x) = q(x) \;\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow p - q$ hat unendl. viele Nullstellen.

$\Rightarrow p - q = 0 \Rightarrow p = q$ ↯