LA1-Vorlesung 23.11.2001

Satz 11:

(a) $(AB)C = A(BC)$

(b) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$

(c) $AE_n = A$, $E_n A = A$

Beweis:

Sei $(A)_{ij}$ das (i,j)-te Element von A.
(Falls $A = ((a_{ij}))$, dann $(A)_{ij} = a_{ij}$).

(a) $((AB)C)_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_k (\sum_r a_{ir} b_{rk}) c_{kj}$
$= \sum_k (\sum_r a_{ir} b_{rk} c_{kj}) = \sum_r (\sum_k a_{ir} b_{rk} c_{kj}) = \sum_r a_{ir} \underbrace{(\sum_k b_{rk} c_{kj})}_{(BC)_{rj}}$
$= (A(BC))_{ij} \Rightarrow$ Behauptung

(b) $((A+B)C)_{ij} = \sum_k (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \underbrace{\sum_k a_{ik} c_{kj}}_{(AC)_{ij}} + \underbrace{\sum_k b_{ik} c_{kj}}_{(BC)_{ij}}$
$= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}$

(c) $(AE_n)_{ij} = \sum_k a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \Rightarrow$ Beh.

Bemerkung:

Falls $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ quadratisch, dann sind $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf $\mathbb{K}^{n\times n}$. Die Multiplikation ist nicht kommutativ.

Denn: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Satz 12:

Die Menge $\mathbb{K}^{n\times n}$ der n-reihigen quadratischen Matrizen (mit $+$ und $\cdot$) ist ein Ring mit Eins.
In $\mathbb{K}^{n\times n}$ gibt es i. allg. keine Inversen: AB wie oben hat keine Inverse ! $[(BA)A^{-1} = 0 \cdot A^{-1} = 0]$

__Definition:__

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt regulär, wenn sie eine Inverse (bezgl. $\cdot$) besitzt, d.h. wenn $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert mit $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$. [0 ist nicht regulär]
Ist A nicht regulär, so heißt A singulär.

__Bemerkung:__

(a) Die regulären Matrizen mit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bilden eine Gruppe bezgl. $\cdot$, die sog. lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

(b) $GL(n,\mathbb{K})$ ist nicht abgeschlossen bezgl. $+$, ist also kein Körper.

__Definition:__

Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $[= ((a_{ij}))]$ und sei A^T durch $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ definiert $\Rightarrow A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$.
A^T heißt transponierte Matrix von A.

$A = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

__Rechenregeln:__

$(A^T)^T = A$, $\quad (A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$ (a)

A regulär $\Rightarrow A^T$ regulär und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

__Beweise:__

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k \underbrace{a_{jk}}_{(A^T)_{kj}} \underbrace{b_{ki}}_{(B^T)_{ik}} = \sum_k (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij} \checkmark$$

A regulär $\Rightarrow \exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$

$\Rightarrow (A^{-1}A)^T = E_n^T = E_n \underset{(a)}{\Rightarrow} A^T \cdot (A^{-1})^T = E_n$

Definition:

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$ gilt.

Bemerkung:

A, B symmetrisch $\Rightarrow A+B$ symmetrisch, $A\cdot B$ i. allg. nicht:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definition:

Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{K}$. Dann ist aA die Matrix mit $(aA)_{ij} = a \cdot a_{ij}$.

Rechenregeln:

(a) $a(A+B) = aA + aB$, $(a+b)A = aA + bA$

(b) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$, $(ab)A = a(bA) = b(aA)$

(c) $cA^T = (cA)^T$

Polynome:

$\cancel{f(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ Funktion $f_1: x \mapsto \cancel{x} + x^2$ (auf $\mathbb{F}_2$)

$f_2: x \mapsto 0$

$\left.\begin{array}{l} f_1(0) = 0 \\ f_1(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 = f_2$

[Wdh: $A^B := \{f: B \to A\}$
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} := \{f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}\}$]

Definition:

Sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ die Menge aller Folgen $(a_0, a_1, a_2 \dots)$, $a_i \in \mathbb{K}$.
Ein Polynom p ist ein Element von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, also $p = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, für das ein $n \in \mathbb{N}_0$ ex., derart dass $a_i = 0 \;\forall i \geq n+1$.

Beispiel:

$p = (1, 3, 5, \sqrt{2}, 1, 0, 0, \dots)$ reelles Polynom

Schreibweisen:

$p = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$p = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ (falls $a_i = 0 \ \forall i \geq n+1$)

$p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ oder $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Nullpolynom: $0 = (0, 0, 0, \dots)$ (d.h. $p = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i$)

Sei $\mathbb{K}[x]$ die Menge aller Polynome (über $\mathbb{K}$).

Verknüpfungen: Sei $p = (a_0, a_1, \dots)$, $q = (b_0, b_1, \dots)$

Addition: $p + q := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$

Multiplikation: $p \cdot q := (c_0, c_1, \dots)$ mit $c_i := \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$