<u>LA1-Vorlesung 02.11.2001</u>

<u>Äquivalente Version von [illegible]</u>

Sei $(A, \circ)$ Gruppe und $B \subseteq A$. Dann ist B Untergruppe $\Leftrightarrow$ $B \neq \emptyset$ und aus $x, y \in B$ immer $x \circ y^{-1} \in B$ folgt.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$": ✓

„$\Leftarrow$": Es gibt ein $x_0 \in B$ (weil $B \neq \emptyset$). $\Rightarrow \underbrace{x_0 \circ x_0^{-1}}_{e} \in B$.

Weiter ist zu jedem $x \in B$ auch $\underbrace{e \circ x^{-1}}_{x^{-1}} \in B$

Schließlich ist für $x, y \in B$ auch $x \circ y = \underbrace{x \circ \underbrace{(y^{-1})^{-1}}_{\in B}}_{y} \in B$. $\blacksquare$

<u>Beispiele:</u>

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$

(b) $\mathbb{Z}_3$ ist keine Untergruppe von $\mathbb{Z}_4$.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

<u>Definition:</u>

Seien $(A, \circ)$, $(A', *)$ zwei Gruppen und $f: A \to A'$.
Dann heißt f (Gruppen-) Homomorphismus, wenn
$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \quad \forall x, y \in A$ gilt. Ist f darüberhinaus bijektiv, so heißt f Isomorphismus.
Ist zusätzlich noch $A' = A$ (und $* = \circ$), so heißt f Automorphismus.
Existiert zu zwei Gruppen $(A, \circ)$, $(A', *)$ ein Isomorphismus $f: A \to A'$, so heißen A und A' isomorph: $A \cong A'$

Bemerkungen:

(a) Sind e, e' die Neutralelemente von A, A', so gilt für einen Homomorphismus $f: A \to A'$, dass $f(e) = e'$. Weiter gilt dann: $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$ wegen $f(\underbrace{x \circ x^{-1}}_{e}) = e' = f(x) * f(x^{-1}) \overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow}$ Beh.

(b) Ist $f: A \to A'$ Homomorphismus, so ~~Bild~~ ist $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ Untergruppe von A' und $\mathrm{Kern}(f) := \{x \in A \mid f(x) = e'\}$ ist Untergruppe von A.

Denn:

$\mathrm{Kern}(f) \neq \emptyset$, weil $f(e) = e'$, also $e \in \mathrm{Kern}(f)$.

Sind $x, y \in \mathrm{Kern}(f) \Rightarrow f(x \circ y^{-1}) = f(x) * f(y^{-1})$

$\overset{(a)}{=} f(x) * [f(y)]^{-1} = e' * e'^{-1} = e' * e' = e'$

$\Rightarrow x \circ y^{-1} \in \mathrm{Kern}(f)$.

(c) Sei $f: A \to A'$ Homomorphismus. Dann gilt:

- f surjektiv $\Leftrightarrow f(A) = A'$
- f injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{e\}$

Denn:

„$\Rightarrow$": Sei $x \in \mathrm{Kern}(f) \Rightarrow f(x) = e' \overset{(a)}{=} f(e)$

$\overset{\text{inj.}}{\Rightarrow} x = e \Rightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{e\}$

„$\Leftarrow$": Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$.

$\Rightarrow f(x) * f(y)^{-1} = e'$

$\overset{\text{Hom.}}{\Rightarrow} f(x \circ y^{-1}) = e' \Rightarrow x \circ y^{-1} \in \mathrm{Kern}(f)$

$\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} x \circ y^{-1} = e \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injektiv

$f: A \to A'$ Homomorphismus, $(A, \circ), (A, *)$ Gruppen.

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation $\sim$ auf A: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow x \circ y^{-1} \in \mathrm{Kern}(f)$ [neue Def. für Äqrel.]

Frage: Kann man $A/_f = \{[x]_\sim \mid x \in A\}$ durch eine geeignete Verknüpfung zur Gruppe machen?

Definition:

$[x]_\sim \bullet [y]_\sim := [x \circ y]_\sim$

Diese Definition ist nur sinnvoll, wenn rechte Seite für alle Vertreter $x \in [x]_\sim$, $y \in [y]_\sim$ die gleiche ist.

Es muß also gelten: $x' \sim x,\ y' \sim y \overset{(*)}{\Rightarrow} x' \circ y' \sim x \circ y$.

Dies ist hier erfüllt:

$$\left.\begin{array}{l} x' \sim x \Leftrightarrow f(x') = f(x) \\ y' \sim y \Leftrightarrow f(y') = f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x') * f(y') = f(x) * f(y)$$

$\overset{\text{Hom.}}{\Rightarrow} f(x' \circ y') = f(x \circ y) \Rightarrow x' \circ y' \sim x \circ y$

Fazit:

„$\bullet$" ist eine Verknüpfung auf $A/_f$ und hängt nur von $\text{Kern}(f)$ ab. Statt $A/_f$ schreibt man auch $A/_{\text{Kern}(f)}$.

Äquivalente Form von $(*)$:

$x' \circ x^{-1},\ y' \circ y^{-1} \in \text{Kern}(f) \Rightarrow x' \circ y' \circ y^{-1} \circ x^{-1} \in \text{Kern}(f)$

Satz 7: (Homomorphiesatz für Gruppen)

Seien $(A, \circ)$, $(A', *)$ Gruppen und $f: A \to A'$ sei ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $(A/_{\text{Kern}(f)}, \bullet)$ ist eine Gruppe.

Die kanonische Abbildung $k: A \to A/_{\text{Kern}(f)}$
$x \mapsto [x]_\sim$

ist ein Homomorphismus.

(b) Es gibt einen injektiven Homomorphismus $\bar{f}: A/_{\text{Kern}(f)} \to A'$ mit $f = \bar{f} \circ k$.

(c) Ist f surjektiv, so ist $\bar{f}$ bijektiv, also Isomorphismus. $A/_{\text{Kern}(f)} \cong A'$.

Beweis:

(a) Assoziativ:

$$([x]_\sim \cdot [y]_\sim) \cdot [z]_\sim = [x \circ y]_\sim \cdot [z]_\sim = [(x \circ y) \circ z]_\sim$$

$$= [x \circ (y \circ z)]_\sim = \dots = [x]_\sim \cdot ([y]_\sim \cdot [z]_\sim)$$

Neutralelement:

$$[e]_\sim : [e]_\sim \cdot [x]_\sim = [e \circ x]_\sim = [x]_\sim = \dots = [x]_\sim \cdot [e]_\sim$$

Inverses von $[x]_\sim$:

$$[x]_\sim \cdot [x^{-1}]_\sim = [x \circ x^{-1}]_\sim = [e]_\sim = \dots = [x^{-1}]_\sim \cdot [x]_\sim$$

(b) und (c): Nach dem Satz des Vorspannes genügt es, zu zeigen, dass $\bar{f}$ ein Homomorphismus ist:

$$\bar{f}([x]_\sim \cdot [y]_\sim) = \bar{f}([x \circ y]_\sim) = f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

$$= \bar{f}([x]_\sim) * \bar{f}([y]_\sim)$$