LA1-Vorlesung 31.10.2001

$(A,\circ)$ Gruppe $\Leftrightarrow$

(a) $(A,\circ)$ Halbgruppe

(b) $\exists e \in A : \forall a \in A : e \circ a = a \circ e = a$

(c) $\forall x \in A : \exists x^{-1} \in A : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$

oder (abgeschwächt):

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b')}\ \exists e \in A : \forall a \in A : a \circ e = a \\ \text{(c')}\ \forall x \in A : \exists x^{-1} \in A : x \circ x^{-1} = e \end{array}\right\} \text{(a), (b), (c)}$$

Schreibweise:

Statt $x \circ y$ schreibt man auch xy. In abelschen Gruppen schreibt man häufig $+$ als Verknüpfung. Außerdem 0 statt e und $-x$ statt x^{-1}.

$x + (-y) \leftrightarrow x - y$

Satz 1:

Sei $(A,\circ)$ eine Halbgruppe. Genau dann ist $(A,\circ)$ Gruppe, wenn es für alle $x, y \in A$ Elemente $z, \bar{z} \in A$ gibt, die

$$x \circ z = y, \quad \bar{z} \circ x = y \qquad (*)$$

erfüllen. Ist dies der Fall, so sind die Elemente $z, \bar{z}$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei $(A,\circ)$ Gruppe, $x, y \in A$. Wir setzen $z = x^{-1} \circ y$. $\Rightarrow x \circ z = x \circ (x^{-1} \circ y) = (x \circ x^{-1}) \circ y$
$= e \circ y = y$

Analog löst $\bar{z} = y \circ x^{-1}$ die 2. Gleichung.

„$\Leftarrow$": ~~Widerspruch~~ Sei $x_0 \in A$ fest (ex. weil $A \neq \emptyset$). Nach $(*)$ ex $e, e' \in A$ mit $x_0 \circ e = x_0$, $e' \circ x_0 = x_0$.

Sei nun $x \in A$ beliebig $\overset{}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} \exists z, \bar{z}$ mit $x_0 \circ z = x$ und $\bar{z} \circ x_0 = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} e' \circ x = e' \circ x_0 \circ z = x_0 \circ z = x \\ x \circ e = \bar{z} \circ x_0 \circ e = \bar{z} \circ x_0 = x \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Setze } x = e: & e = e' \circ e & (1. \text{Gl.}) \\ \text{Setze } x = e': & e' \circ e = e' & (2. \text{Gl.}) \end{array}\right\} \Rightarrow e = e'$$

$\Rightarrow$ e ist Neutralelement von $(A, \circ)$, d.h. (b) ist erfüllt.

Axiom (c):

Nach $(*)$ ex. $x^{-1}, x' \in A$ mit $x \circ x^{-1} = e$, $x' \circ x = e$ zu $x \in A$. $x' = x' \circ e = x' \circ x \circ x^{-1} = e \circ x^{-1} = x^{-1}$

$\Rightarrow$ x^{-1} ist das Inverse von x, d.h. (c) ist erfüllt.

Eindeutigkeit:

Sei $x \circ z = y$ und $x \circ z' = y \Rightarrow x \circ z = x \circ z'$

$\Rightarrow \underbrace{x^{-1} \circ x}_{e} \circ z = \underbrace{x^{-1} \circ x}_{e} \circ z' \Rightarrow z = z'$

Analog für die zweite Gleichung.

Weitere Beispiele:

(a) $(\mathbb{R}^n, +)$ (oder $(\mathbb{Q}^n, +)$ oder $(\mathbb{Z}^n, +)$) ist abelsche Gruppe, wobei

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Neutralelement: $(0, \dots, 0)$

Inverses Element: $(-x_1, \dots, -x_n) = -(x_1, \dots, x_n)$

(b) Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Verknüpfung $\circ$ auf A kann durch Verknüpfungstafel definiert werden

$\circ$	a_1	$\cdots$	a_n
a_1	$*$	$\cdots$	$*$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$*$	$\cdots$	$*$

keine Gruppe (Assoz.)

Beispiel:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	b	e	a
b	a	b	e

$(ae)b = bb = e$ ↯
$a(eb) = ab = a$

[Satz 1: In keiner Zeile doppeltes Element, in keiner Spalte dopp. Element]

Falls Gruppe, dann spricht man von Gruppentafel. Dann darf in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element von A nur einmal auftreten. Zusammen mit Assoziativgesetz reicht das für Gruppe! [→ Aufg. 5.)a)]
Ohne Assoziativität falsch!

Einfachste Gruppe:

$A = \{e\}$

od. $\circ$

+	e
e	e

oder (=)

+	0
0	0

$A = \{0\}$

Gruppe mit 2 Elementen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

oder (=)

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

Gruppe mit 3 Elementen:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

[Auch kommutativ, sieht man an der Symmetrie an d. Diagonalen!

oder (=)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Gruppe mit 4 Elementen:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Hier gibt es noch andere Gruppen!

Definition:

Sei $(A, \circ)$ und $B \subset A$ Teilmenge. B (bzw. $(B, \circ)$) heißt Untergruppe von A, wenn $\circ$ eingeschränkt auf B (also $\circ: B \times B \overset{*}{\to} B$) wieder eine Verknüpfung* ist und dann $(B, \circ)$ wieder Gruppe ist.

Bemerkung:

Ist B Untergruppe von A, so ist das Neutralelement e_B in B gleich dem Neutralelement e_A in A. Weiter ist das Inverse von $x \in B$ in B das gleiche wie in A.

Begründung:

$$\left.\begin{array}{ll} e_B \circ e_B = e_B & (\text{in } B) \\ e_B \circ e_A = e_B & (\text{in } A) \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{(Satz 1}\\ \text{auf } A)}}{\Longrightarrow} e_A = e_B$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_A^{-1} \circ x = e & (\text{in } A) \\ x_B^{-1} \circ x = e & (\text{in } B) \end{array}\right\} \underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} x_A^{-1} = x_B^{-1}$$

Satz 4:

Sei $(A, \circ)$ eine Gruppe und $B \subset A$ eine Teilmenge. B ist genau dann UG, wenn

(i) $\forall x, y \in B: x \circ y \in B$ (ii) $e \in B$ (wobei e Neutr. El. von A)

(iii) $\forall x \in B: x^{-1} \in B$ (x^{-1} Inverses in A)