LA1-Vorlesung 26.10.2001

LGS:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Lösungsverhalten:

(a) unlösbar

(b) eindeutig lösbar

(c) mehrere (unendl. viele) Lösungen

Falls $(b_1, \dots, b_m) = (0, \dots, 0)$, so heißt das LGS homogen, sonst inhomogen.

homogenes LGS:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Hier ex. immer eine Lsg., die triviale Lsg. $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Deshalb interessiert man sich hier für nicht-triviale Lösungen.

Symbolische Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge L_h eines homogenen LGS:

$(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in L_h \Rightarrow (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \in L_h$

$\Rightarrow (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in L_h \ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}}$

§2 Gruppen

Sei A eine Menge. Eine (innere) Verknüpfung „$\circ$" ist eine Abbildung $\circ : A\times A \to A$; statt $\circ(a,b)$ schreibt man auch $a\circ b$.

Beispiele:

(a) Auf $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind „+" und „·" Verknüpfungen.

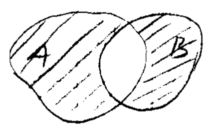
(b) Auf $B^B := \{f : B \xrightarrow{\text{Abb.}} B\}$ ist die Komposition „$\circ$" eine Verknüpfung.

[$B^n := \underbrace{B\times \cdots \times B}_{n\text{-mal}} = \{f : \{1,\dots,n\} \to B\}$]

(c) Auf $\mathcal{P}(B)$ sind „$\cup$", „$\cap$", „Δ" und „$\setminus$" erklärt.

[$A\setminus B := \{x\in A \mid x\notin B\}$

$A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$]



Definition:

Sei „$\circ$" eine Verknüpfung auf A. „$\circ$" heißt assoziativ, (genau dann) wenn

$a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$ für alle $a,b,c\in A$

gilt. (Assoziativgesetz)

„$\circ$" heißt kommutativ, wenn

$a\circ b = b\circ a$ für alle $a,b\in A$

gilt. (Kommutativgesetz)

Bemerkung:

In einer assoziativen Struktur sind Klammern entbehrlich. $(a\circ b)\circ c =: a\circ b\circ c$, speziell

$a^n := \underbrace{a\circ a\circ \cdots \circ a}_{n\text{-mal}}$.

Beispiele:

(a) $+, \cdot$ (s.o.) sind assoziativ und kommutativ.

(b) $\circ$ auf B^B ist assoziativ aber i.a. nicht kommutativ.

(c) $\cup, \cap, \Delta$ sind assoziativ und kommutativ auf $\mathcal{P}(B)$. Aber $\setminus$ ist nicht assoziativ und nicht kommutativ.

Definition:

Eine Menge A mit einer assoziativen Verknüpfung „$\circ$" heißt Halbgruppe. Sie heißt kommutativ, wenn das Kommutativgesetz erfüllt ist. Gilt $e \circ a = a \circ e = a$ für ein $e \in A$, und alle $a \in A$, so heißt e neutrales Element von $(A, \circ)$. Gibt es in $(A, \circ)$ ein neutrales Element e und ist $x \in A$, so heißt x^{-1} inverses Element von x, wenn $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$ gilt.

Beispiele:

(a) In $(\mathbb{N}, +)$ kein neutrales Element (da $0 \notin \mathbb{N}$)!
Aber: $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind komm. Halbgruppen mit Neutralelement 0, in $(\mathbb{N}_0, +)$ gibt es keine Inversen, sonst ja!
$(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ sind komm. Halbgruppen mit Neutralelement 1. Inversen existieren hier nicht immer. Aber in $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ existieren Inverse.

Bemerkung:

(a) Sei $(A, \circ)$ eine Halbgruppe. Existiert ein neutrales Element e, so ist dieses eindeutig.

Beweis:

Sei e' ebenfalls neutral, d.h. $e' \circ x = x \circ e' = x$ $\forall x \in A$. $\Rightarrow e' \circ e = e \Rightarrow e' = e$.

(b) Existiert Neutralelement e und hat $x \in A$ das Inverse x^{-1}, so ist x^{-1} eindeutig.

Beweis:

Sei x' ebenfalls invers zu x, d.h. $x' \circ x = x \circ x' = e$

$\Rightarrow x^{-1} \circ (x \circ x') = x^{-1} \circ e$

$\Rightarrow \underbrace{(x^{-1} \circ x)}_{e} \circ x' = x^{-1}$

$\Rightarrow \quad x' = x^{-1}$

Definition:

Sei A eine Menge mit Verknüpfung „$\circ$".
$(A, \circ)$ heißt Gruppe, wenn

(a) $(A, \circ)$ ist Halbgruppe

(b) es ex. Neutralelement e

(c) jedes $x \in A$ hat ein Inverses x^{-1}.

Ist „$\circ$" kommutativ, so spricht man von einer abelsichen Gruppe.

Beispiele:

(a) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen.
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.

(b) $(\mathcal{P}(A), \cap), (\mathcal{P}(A), \cup)$ keine Gruppen, aber $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ ist abelsche Gruppe. $(A \Delta \emptyset = A, A \Delta A = \emptyset)$

(b) $(B^B, \circ)$ Halbgruppe mit Neutralelement id_B. Keine Gruppe, nur wenn f bijektiv.