LA1-Vorlesung 24.10.2001

Äquivalenzrelation $\sim$ auf Menge A: reflexive, symmetrische und transitive Relation.

Beispiel:

$A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ durch 3 teilbar

(i) $x \sim x$: $x - x = 0 = 3 \cdot 0$ ✓

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$: $x - y = 3 \cdot m$, $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y - x = 3 \cdot (-m)$ ✓

(iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$: $\left.\begin{array}{l} x - y = 3m \\ y - z = 3p \end{array}\right\} m, p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x - z = 3m + 3p = 3(m+p)$ ✓

Zu $x \in A$ sei $[x]_\sim := \{ y \in A \mid x \sim y \}$ die Äquivalenzklasse von x.

Sei $A/_\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen (zu $\sim$).

Weiter zum Bsp.:

$[x]_\sim = \{ x + 3m \mid m \in \mathbb{Z} \}$, $x \in \mathbb{Z}$

Ist $[x]_\sim$ die Äquivalenzklasse von x, so heißt x Repräsentant von $[x]_\sim$.

Weiter zum Bsp.:

Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

$[0]_\sim = \{ \ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots \}$

$[1]_\sim = \{ \ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots \}$

$[2]_\sim = \{ \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots \}$

$[3]_\sim = \{ \ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots \} = [0]_\sim$

Also: $\mathbb{Z}$ (unendl.) in $A/_\sim$ mit 3 Teilen unterteilt.

$A/_\sim$ heißt auch Faktormenge.

Mengensystem $\mathcal{M}$ = Menge, deren Elemente selbst wieder Mengen sind.

Spezielles Mengensystem: die Potenzmenge $\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subset A\}$ $(\Rightarrow A \in \mathcal{P}(A), \emptyset \in \mathcal{P}(A))$

$$\bigcup_{B\in\mathcal{M}} B := \{x \mid x \in B \text{ für ein } B \in \mathcal{M}\} = \{x \mid \exists B \in \mathcal{M} : x \in B\}$$

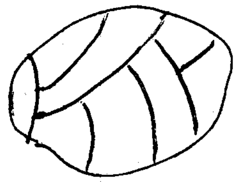
$$\bigcap_{B\in\mathcal{M}} B := \{x \mid x \in B \text{ für alle } B \in \mathcal{M}\} = \{x \mid \forall B \in \mathcal{M} : x \in B\}$$

$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(A)$ heißt Partition von A, wenn

(i) alle $B \in \mathcal{M}$ nicht leer sind

(ii) je zwei $B, C \in \mathcal{M}$ sind entweder gleich oder disjunkt $(B \cap C = \emptyset)$

(iii) $\bigcup_{B\in\mathcal{M}} B = A$


A

<u>Satz:</u>

Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf A. Dann bilden die Äquivalenzklassen eine Partition von A. (d.h. $A \backslash \sim$ ist Partition). Zu jeder Partition $\mathcal{M}$ von A ex. eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A, mit $A\backslash\sim \; = \mathcal{M}$.

<u>Beweis:</u>

Jedes $[x]_\sim \in A\backslash\sim$ ist nicht leer, wegen $x \in [x]_\sim$, also (i).

Seien $[x]_\sim \neq [y]_\sim \Rightarrow x \not\sim y$. Angen. $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$ ex. $\Rightarrow z \sim x, z \sim y \overset{\text{symm.}}{\Rightarrow} x \sim z, z \sim y \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow} x \sim y$. ↯

$\Rightarrow [x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$, also (ii)

$\bigcup_{[x]_\sim \in A\backslash\sim} [x]_\sim = \bigcup_{x \in A} [x]_\sim = A$ weil $x \in [x]_\sim$), also (iii).

$\Rightarrow$ erste Aussage

Sei $\mathcal{M}$ Partition von A. Dann ex. zu jedem $x \in A$ genau ein $B_x \in \mathcal{M}$ mit $x \in B_x$. Damit ist eine Abbildung

$$f: A \to \mathcal{M} \quad \text{erklärt.}$$
$$x \mapsto B_x$$

Wir setzen $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ $(\Leftrightarrow B_x = B_y)$

$\Rightarrow \sim$ Äquivalenzrelation und $A/_\sim = \mathcal{M}$

$\Rightarrow$ zweite Aussage ■

<u>Satz:</u>

Sei $f: A \to B$. Dann wird durch $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation auf A erklärt.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & B \\ A/_\sim \arrow[ur, dashed, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

$k: A \to A/_\sim$ — andere Schreibweise: $A/_f$

$x \mapsto [x]_\sim$ (kanonische Abb.), surjektiv

Gesucht: $\bar f: A/_\sim \to B$ mit $\bar f \circ k = f$

<u>Satz:</u> (Grundform des Homomorphiesatzes)

Sei $f: A \to B$ Abbildung und $k: A \to A/_f$ die zugehörige kanonische Abbildung. Dann ex. eine injektive Abbildung $\bar f: A/_f \to B$ mit $f = \bar f \circ k$. Ist f surjektiv, so ist $\bar f$ bijektiv.

<u>Beweis:</u>

Setze $\bar f: ([x]_\sim) = f(x) \Rightarrow$ Abb. $\bar f$ erklärt!

$\bar f$ ist injektiv (und erfüllt $\bar f \circ k = f$): $\underbrace{\underset{f(x)}{\bar f([x]_\sim)} = \underset{f(y)}{\bar f([y]_\sim)}}_{x \sim y \Rightarrow [x]_\sim = [y]_\sim}$

Kapitel 1 (Grundlagen aus der Algebra)

§1 Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$

Lineares GlS., $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$

Gesucht: Lösung $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ die das LGS erfüllt.

Allg. Frage: Wann ist LGS lösbar?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{unlösbar}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ genau eine Lsg}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \infty \text{ Lsg}$$

Wann ist LGS lösbar?

Wie viele Lsg.?