LA1 19.10.2001

(i) $id_A: A \to A$

$x \mapsto x$

(ii) Einschränkung

(iii) $f: A \to B$ bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrabb. $f^{-1}: B \to A$ existiert.

$f^{-1}(y) = x$, wo ~~x~~ das eindeutige Element von A ist, das $f(x) = y$ erfüllt.

(iv) Komposition: $g \circ f: A \to C$

$f: A \to B$, $g: B \to C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkungen:

(a) f bijektiv $\Rightarrow f^{-1}$ bijektiv (1)

und $(f^{-1})^{-1} = f$ (2)

Beweis:

f^{-1} ist injektiv: $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = \overset{A}{\overset{\downarrow}{x}}$, $y_1, y_2 \in B$

$\Rightarrow f(x) = y_1$, $f(x) = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

f^{-1} ist surjektiv: Sei $x \in A$. Setze $y = f(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x$.

f^{-1} ist also bijektiv (1).

Schließlich: $(f^{-1})^{-1}: A \to B$

$(f^{-1})^{-1}(x) = y$, wo $f^{-1}(y) = x$

$\Rightarrow f(x) = y \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ für alle $x \in A$.

$\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$ (2)

(b) Ist $f: A \to B$ bijektiv, so gilt:

$f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_B$

c) Komposition ist nicht kommutativ

(i) siehe (b)

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$

$$g \circ f : x \to -x^2$$
$$\neq$$
$$f \circ g : x \to x^2$$

(iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, x)$ $\quad$ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} g \circ f : x \mapsto (2x, 0) \\ f \circ g : \text{existiert nicht!} \end{cases}$$

(d) Unterschied zwischen f^{-1} und $f^{-1}(C)$, $C \subset B$:
Umkehrabb. f^{-1} von $f: A \to B$ ex. nur, wenn f bijektiv ist.
Urbild $f^{-1}(C)$ einer Menge $C \subset B$ ex. immer!
$$f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$$
Falls f^{-1} ex., dann ist $f^{-1}(C)$ das Bild von C unter f^{-1}, d.h. $f^{-1}(C) = \{f^{-1}(y) \mid y \in C\}$

Beispiele:

(a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$
Beh.: $f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$$z \mapsto \begin{cases} 2z+1 & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(n) = (f^{-1}(f(n)))$$
$$= \left\{ \begin{matrix} n, & \text{falls} & n \text{ gerade} \\ n, & \text{falls} & n \text{ ungerade} \end{matrix} \right\} = id_{\mathbb{N}}$$
$$\Rightarrow (f \circ f^{-1})(z) = f(f^{-1}(z))$$
$$= \left\{ \begin{matrix} z & \text{falls} & z \geq 0 \\ z & & z \leq 0 \end{matrix} \right\} = id_{\mathbb{Z}}$$

Satz:

Seien A, B nichtleere Mengen und $f: A \to B$ eine Abbildung.

(a) f injektiv $\Leftrightarrow [\exists g: B \to A \text{ mit } g \circ f = id_A]$

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow [\exists g: B \to A \text{ mit } f \circ g = id_B]$

(c) f bijektiv $\Leftrightarrow [\exists g: B \to A \text{ mit } g \circ f = id_A$
und $f \circ g = id_B]$

Beweis:

(a) „$\Rightarrow$": Sei f injektiv. Setze $g(y) := \begin{cases} x \text{ mit } f(x) = y ; & y \in f(A) \\ x_0 \in A ; & y \notin f(A) \end{cases}$

x_0: fester Punkt

$\Rightarrow g \circ f = id_A$ ✓

„$\Leftarrow$": Vor.: $\exists g: B \to A$ mit $g \circ f = id_A$.

Beh.: f injektiv.

Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$.

$\Rightarrow \underbrace{g(f(x))} = \underbrace{g(f(y))}$

$\Rightarrow id_A(x) = id_A(y) \Rightarrow x = y$ ✓

(b) „$\Rightarrow$": Sei f surjektiv. ~~Setze $g(y) := \{$~~

$\Rightarrow$ Jedes $y \in B$ ist Bild unter f

$\Rightarrow f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

$g: B \to A$ wird dadurch definiert, dass zu jedem $y \in B$ ein $x \in f^{-1}(y)$ gewählt wird.

$\Rightarrow f \circ g = id_B$ ✓

„$\Leftarrow$": Sei $y \in B \Rightarrow y = \overbrace{f(g(y))}^{id} \Rightarrow y \in f(A)$

$\Rightarrow f(A) = B \Rightarrow f$ surjektiv. ✓

(c) „$\Rightarrow$": Setze $g = f^{-1}$ ✓

„$\Leftarrow$": Nach (a) ist f injektiv, nach (b) surjektiv, also bijektiv ✓

$\blacksquare$

Relationen: (speziell Äquivalenzrelationen)

Definition:

Eine Relation $\sim$ auf der Menge A heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(i) $x \sim x$ (Reflexivität)

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)

(iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)