LA1 17.10.2001

Abbildungen:

Abbildung $f: A \to B$

$$x \mapsto f(x) = y$$

Abbildung als Menge:

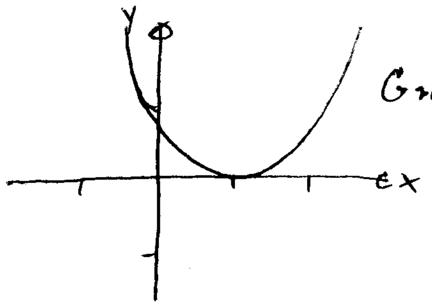
$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B = F$$

$$(x, y), (x, y') \in F \Rightarrow y = y'$$

Beispiele:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (x-1)^2$$



Graph v. f

(b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Definition:

Sei $f: A \to B$ Abb. Dann heißt:

A Definitionsbereich von f,

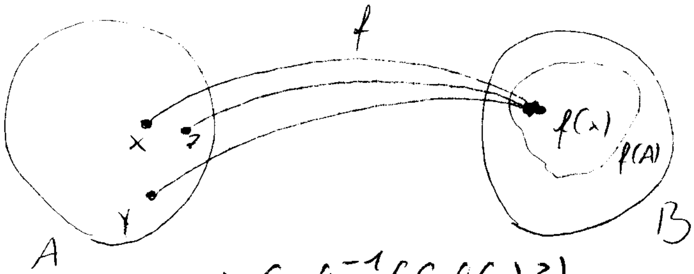
B Wertebereich von f

$f(x)$ (für $x \in A$) Bild(punkt) von x (unter f)

$x \in A$ Urbild von $y \in B$, wenn $f(x) = y$

$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ Bild (Bildmenge), $f(A) \subset B$

$f^{-1}(C) := \{x \in A \mid f(x) \in C\}$, Urbild der Menge $C \subset B$



$$x \in f^{-1}(\{f(x)\})$$

Definition:

Sei $f: A \to B$ Abbildung.

(a) f heißt injektiv, wenn jedes $y \in f(A)$ nur ein Urbild hat. [f injektiv $\Leftrightarrow$ [$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$]]

(b) f heißt surjektiv, wenn $f(A) = B$ gilt.

(c) f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (x-1)^2$

weder injektiv noch surjektiv!

$f: [1, \infty) \to [0, \infty)$

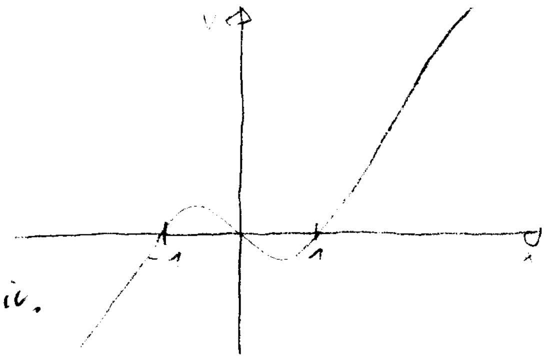
$x \mapsto (x-1)^2$

ist jedoch bijektiv.

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x(x-1)(x+1)$

surjektiv aber nicht injektiv.



(c) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist bijektiv.

Umgang mit Abbildungen:

(a) $\mathrm{id}_A: A \to A$

$x \mapsto x$ identische Abbildung.

(b) $f: A \to B$ Abb., $C \subset A \Rightarrow f: C \to B$

$x \mapsto f(x)$ $\quad$ $x \mapsto f(x)$

Einschränkung von f auf C.

(c) f bijektiv, $f: A \to B$.

$f^{-1}: B \to A$

$y \mapsto x$, wobei $f(x) = y$

Umkehrabbildung.

(d) Komposition : $f: A \to B$, $g: B \to C$ Abbildungen.

$g \circ f: A \to C$

$x \to g(f(x))$