Musterlösungen zur Klausur
Lineare Algebra usw. vom 28.09.2004

I.1

Es sei G eine Gruppe (mit multiplikativ geschriebener Verknüpfung), und für $x \in G$ sei

$$H_x := \{g \in G \mid x = g^{-1}xg\}.$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes $x \in G$ ist H_x eine Untergruppe von G.

b) Für je zwei Elemente $x, y \in G$ gilt $H_x \cap H_y \subseteq H_{xy}$.

c) Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $H_e = G$.

d) Geben Sie in der symmetrischen Gruppe S_3 zwei Elemente x, y an, für die $H_x \cap H_y \neq H_{xy}$ gilt.

Lösung:

a) Es gilt $e \in H_x$, also ist H_x nicht leer. Außerdem gilt für $g, h \in H_x$:

$$(gh^{-1})^{-1}x(gh^{-1}) = hg^{-1}xgh^{-1} = hxh^{-1} = h(h^{-1}xh)h^{-1} = exe = x.$$

Also liegt auch gh^{-1} in H_x, und dieses ist daher nach dem Untergruppenkriterium eine Untergruppe.

b) Für $g \in H_{xy}$ gilt

$$g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = xy,$$

also liegt g auch in H_{xy}, was zu zeigen ist.

c) Für das neutrale Element und jedes $g \in G$ gilt $g^{-1}eg = e$, also haben wir $G \subseteq H_x$. Die Inklusion $H_x \subseteq G$ ist nach Definition klar, und es folgt die Gleichheit.

d) Es seien $x = y = (1\ 2) \in S_3$, also insbesondere $yx = x^2 = e$. Dann liegt zum Beispiel die Transposition $g = (2\ 3)$ nicht in H_x, denn

$$g^{-1}xg = (2\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3) = (1\ 3) \neq x.$$

Damit gilt

$$H_x \cap H_y = H_x \neq S_3 = H_e = H_{xy}.$$

I.2

Im $\mathbb{R}^4$ sei der Endomorphismus Φ gegeben durch

$$\Phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) .$$

Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum

$$U := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Als Basis von U wählen wir

$$B := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

a) Zeigen Sie: Für beliebiges $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ und sein Bild $\Phi(x) = (v_1, v_2, v_3, v_4)^\top$ gilt die Gleichung

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4.$$

b) Zeigen Sie, dass U Φ-invariant ist, und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Einschränkung $\Phi|_U$ bezüglich der Basis B von U.

c) Zeigen Sie, dass es keinen Φ-invarianten Untervektorraum W gibt, für den $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ gilt.

Lösung:

a) Wir haben

$$v_1 = x_2 + x_4,\ v_2 = -x_1 + 2x_2 + 2x_4,\ v_3 = -x_1 + x_2 + 2x_4,\ v_4 = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4.$$

Also gilt

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = x_2 + x_4 + x_1 - 2x_2 - 2x_4 - x_1 + x_2 + 2x_4 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

b) Für $x \in U$ erfüllt nach Teil a) auch $\Phi(x)$ die Gleichung, die U definiert, also liegt auch $\Phi(x)$ in U, und damit ist U unter Φ invariant. Nun muss man die Bilder der Vektoren aus B bestimmen und als Linearkombinationen der Elemente von B aufschreiben. Es gilt

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Abbildungsmatrix der Einschränkung von Φ auf U bezüglich der Basis B die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Jeder Untervektorraum W mit $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ ist eindimensional. Wenn es solch ein W gäbe, das zusätzlich Φ-invariant ist, so müsste W von einem Eigenvektor x erzeugt werden. Es gibt also eine reelle Zahl α mit $\Phi(x) = \alpha x$. In der Notation aus Teil a) folgt daraus

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = \alpha(x_1 - x_2 + x_3 - x_4).$$

Da x nicht in U liegt, ist $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \neq 0$, was $\alpha = 1$ erzwingt. (Das kann man alternativ auch an der Spur der Matrix ablesen, oder am charakteristischen Polynom.)

Der Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1 ist aber eindimensional, denn es gilt

$$\mathrm{Rang}(\Phi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Rang}(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{Rang}(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}) = 3.$$

Da aber der erste Basisvektor aus B bereits Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, liegt der gesamte Eigenraum zum Eigenwert 1 in U, und es kann kein W mit den gewünschten Eigenschaften geben.

I.3

Gegeben seien die reellen 3×3-Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$B := A^{2004} + 2A^{2002} - 3A^{2001} + A + E_3.$$

a) Zeigen Sie: Es gilt $B = A + E_3$, und B ist invertierbar.

b) Berechnen Sie B^{-1}.

Lösung:

a) Es ist zu zeigen, dass $A^{2004} + 2A^{2002} - 3A^{2001} = A^{2001} \cdot (A^3 + 2A - 3A^0)$ die Nullmatrix ist. Dazu zeigen wir, dass der Ausdruck in Klammern bereits Null ist. Dies geht hier natprlich durch direkte Rechnung, wir benutzen aber aus didaktischen Gründen den Satz von Cayley-Hamilton. Mit Sarrus berechnet sich das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}\,(A, X)$ als

$$\begin{aligned} \mathrm{CP}(A, X) &= \det(XE_3 - A) = \det(\begin{pmatrix} X+1 & -4 & 1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 2 & X \end{pmatrix}) \\ &= (X^3 - X) - 4 + (X - 1) + 2(X + 1) = X^3 + 2X - 3. \end{aligned}$$

Also sagt der Satz von Cayley-Hamilton, dass $A^3 + 2A - 3E_3 = 0$ gilt, also $B = A + E_3$. Außerdem ist

$$\det(B) = -\det(-E_3 - A) = -\mathrm{CP}(A, -1) = -(-1 - 2 - 3) = 6 \neq 0,$$

daher ist B invertierbar.

b) Zum Beispiel der Gauß-Algorithmus liefert

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies lässt sich elegant auch mit Cayley-Hamilton für die Matrix B gewinnen, nämlich durch

$$\mathrm{CP}(B, X) = \mathrm{CP}(A + E_3, X) = \det(XE_3 - (A + E_3)) = \mathrm{CP}(A, X - 1) = X^3 - 3X^2 + 5X - 6.$$

Dann sagen Cayley und Hamilton unisono

$$B^{-1} = \frac{1}{6}(B^2 - 3B + 5E_3),$$

was durch Einsetzen obige Matrix liefert.

I.4

Es seien K ein Körper und V, W_1, W_2 drei K-Vektorräume. Weiter seien zwei Homomorphismen

$$\Phi_1 : V \longrightarrow W_1, \quad \Phi_2 : V \longrightarrow W_2$$

gegeben, sodass Φ_1 surjektiv ist und $\mathrm{Kern}(\Phi_1) \subseteq \mathrm{Kern}(\Phi_2)$ gilt.

a) Geben Sie eine Definition für die Surjektivität von Φ_1 an.

b) Es seien $u, v \in V$ gegeben mit $\Phi_1(u) = \Phi_1(v)$. Zeigen Sie, dass $\Phi_2(u) = \Phi_2(v)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $\Psi : W_1 \longrightarrow W_2$ gibt, sodass

$$\Phi_2 = \Psi \circ \Phi_1$$

gilt.

Lösung:

a) Die Surjektivität von Φ_1 heißt, dass es für jedes $w_1 \in W_1$ mindestens ein $v \in V$ gibt, sodass $\Phi_1(v) = w_1$ gilt.

b) Aus $\Phi_1(u) = \Phi_1(v)$ folgt wegen der Linearität $\Phi_1(u - v) = 0$, also $u - v \in \mathrm{Kern}(\Phi_1)$. Nach Voraussetzung liegt dann $u - v$ auch im Kern von Φ_2, und es folgt wieder wegen der Linearität $\Phi_2(u) = \Phi_2(u - (u - v)) = \Phi_2(v)$.

c) Die einzig mögliche Abbildung $\Psi : W_1 \longrightarrow W_2$ mit $\Phi_2 = \Psi \circ \Phi_1$ ist definiert wie folgt: für $w_1 \in W_1$ wählen wir ein $v \in V$ mit $\Phi_1(v) = w_1$. Dann muss $\Psi(w)$ durch die Gleichung

$$\Psi(w) = \Psi(\Phi_1(v)) = \Phi_2(v)$$

definiert werden. Dass dies eine wohldefinierte Abbildung liefert, folgt aus b), denn $\Phi_2(v)$ hängt nur von w_1, nicht aber von der Wahl von v ab.

Zu zeigen ist nun noch die Linearität von Ψ. Dazu seien $\alpha \in K$, $w_1, \widetilde{w}_1 \in W_1$ und $v, \widetilde{v} \in V$ mit $\Phi_1(v) = w_1, \Phi_1(\widetilde{v}) = \widetilde{w}_1$. Dann gilt wegen der Linearität von Φ_1 :

$$\Phi_1(\alpha v + \widetilde{v}) = \alpha w_1 + \widetilde{w}_1,$$

und wir erhalten

$$\Psi(\alpha w_1 + \widetilde{w}_1) = \Psi(\Phi_1(\alpha v + \widetilde{v})) = \Phi_2(\alpha v + \widetilde{v}) = \alpha \Phi_2(v) + \Phi_2(\widetilde{v}) = \alpha \Psi(w_1) + \Psi(\widetilde{w}_1),$$

was zu zeigen war.

I.5

Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch ihre Abbildungsmatrix A bezüglich der Standardbasis, wobei

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass Φ diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine Transformationsmatrix S, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ diagonal ist.

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist Φ^n eine Projektion?

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\mathrm{CP}(A, X) = \det(\begin{pmatrix} X + \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & X + \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = (X-1) \cdot [(X + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] = X \cdot (X-1) \cdot (X+1).$$

Damit hat A die drei (paarweise verschiedenen) Eigenwerte $0{,}1,-1$, was für eine 3×3-Matrix hinreichend für die Diagonalisierbarkeit ist.

Um eine Basiswechselmatrix zu finden, wählen wir Basisvektoren der (sämtlich eindimensionalen) Eigenräume. Dabei finden wir zum Beispiel die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A, 0), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A, 1), \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A, -1).$$

Als Basiswechselmatrix bietet sich also die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

an.

b) Mit der Matrix S aus Teil a) gilt

$$S^{-1} A S = \mathrm{diag}(0, 1, -1).$$

Daher ist

$$S^{-1} A^n S = (S^{-1} A S)^n = \mathrm{diag}(0, 1, (-1)^n).$$

Φ^n ist genau dann eine Projektion, wenn es diagonalisierbar mit Eigenwerten 0,1 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn n gerade ist.

Aufgabe I.6

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit der Eigenschaft

$$\forall 1 \leq i, j \leq n: \; x_i^\top \cdot x_j = \begin{cases} n, & \text{falls } i = j, \\ a, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Betrag $|\det(x_1, \ldots, x_n)|$.

b) Für welche Werte von a (in Abhängigkeit von n) bilden die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$?

Lösung:

Es sei A die Matrix mit den Spalten $x_1, \ldots, x_n$. Dann sagen die Vorgaben

$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} n & a & \ldots & a & a \\ a & n & \ddots & a & a \\ \vdots & \ddots & n & \ddots & \vdots \\ a & a & \ldots & n & a \\ a & a & \ldots & a & n \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist $(n-a)^n + na(n-a)^{n-1}$, wie man mit Gauß folgender Maßen einsieht: Ziehe erst die erste Zeile von allen anderen ab, addiere danach die hinteren $n-1$ Spalten zur ersten und erhalte eine Dreiecksmatrix mit dieser Determinante.

Alternativ kann man auch argumentieren: Es ist

$$\det(A^\top \cdot A) = \det((n-a)E_n - M) = \mathrm{CP}(M, n-a),$$

wobei M die $n \times n$-Matrix ist, deren Einträge sämtlich gleich $-a$ sind. Da der Rang von M 0 oder 1 ist (je nachdem, ob a 0 oder nicht 0 ist), ist der Kern von M mindestens $(n-1)$-dimensional (Dimensionsformel), und daher ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 mindestens $n-1$. Das charakteristische Polynom ist also

$$X^n - \mathrm{Spur}(M) X^{n-1} = X^n + naX^{n-1},$$

und hier wird nun $n-a$ eingesetzt, um die Determinante von $A^\top \cdot A$ zu erhalten.

Nun folgt aber

$$|\det(A)| = \sqrt{\det(A^\top \cdot A)} = \sqrt{(n-a)^n + na(n-a)^{n-1}}.$$

b) Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind genau dann linear unabhängig und damit eine Basis des $\mathbb{R}^n$, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(n-a)^n + na(n-a)^{n-1} \neq 0.$$

Links steht $(n-a)^{n-1} \cdot [n - a + na]$. Also sind die Vektoren genau dann eine Basis, wenn entweder $n = 1$ gilt oder (im Fall $n \geq 2$)

$$a \neq n \text{ und } a \neq \frac{n}{(n-1)}.$$

II.1

Finden Sie so viele komplexe Matrizen wie möglich, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Jede der Matrizen hat das charakteristische Polynom $(X-1)^5 \cdot (X-2)^3$.

(ii) Jede der Matrizen hat das Minimalpolynom $(X-1)^2 \cdot (X-2)^2$.

(iii) Keine zwei der angegebenen Matrizen sind zueinander ähnlich.

Begründen Sie, wieso Ihre Matrizen diese Bedingungen erfüllen und weshalb Ihre Liste nicht vergrößert werden kann.

Lösung:

Jede der beschriebenen Matrizen ist eine Matrix der Größe 8×8, denn das charakteristische Polynom hat Grad 8. Da das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es zu den Matrizen eine Jordan'sche Normalform. Zwei solche Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie die selbe Jordan'sche Normalform besitzen. Gefragt ist also eigentlich nach den verschiedenen Jordan'schen Normalformen (bis auf Vertauschen der Kästchen) mit dem gegebenen charakteristischen und Minimalpolynom.

Die Exponenten im charakteristischen Polynom sind die Dimensionen der zugehörigen Haupträume. Der Hauptraum zum Eigenwert 1 ist also 5-dimensional, der zum Eigenwert 2 ist 3-dimensional. Die Exponenten im Minimalpolynom sind die Längen derjeweils längsten Jordankästchen. Für beide Eigenwerte hat also das längste Kästchen Länge 2. Der Block zum Eigenwert 2 besteht also aus einem Einer- und einem Zweierkästchen, der zum Eigenwert 1 entweder aus einem Einer- und zwei Zweierkästchen oder aus drei Einer- und einem Zweierkästchen.

Die folgende Liste ist also eine mögliche Lösung der Aufgabe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & 0 & \\ & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & 0 & \\ & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Dabei handelt es sich um 8×8-Matrizen, und es stehen außerhalb der angegebenen Jordankästchen nur Nullen.

II.2

Es sei U der Untervektorraum des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

a) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^4$ den Abstand von x zu U.

b) Nun seien zusätzlich

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir definieren die Gerade g durch

$$g := v + \mathbb{R} \cdot w = \{v + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Berechnen Sie den Abstand $\mathrm{d}\,(g, U)$.

Lösung:

a) Wir wählen eine ONB $\{b_1, b_2\}$ von U und ergänzen sie zu einer ONB von $\mathbb{R}^4$ wie folgt:

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_4 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das Orthogonale Komplement zu U wird also von b_3 und b_4 erzeugt, und die orthogonale Projektion des Vektors $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ auf $U^\perp$ ist

$$\pi_{U^\perp}(x) = \langle x, b_3 \rangle b_3 + \langle x, b_4 \rangle b_4.$$

Der Abstand von x zu U ist die Länge dieses projizierten Vektors, also

$$\mathrm{d}(x, U) = \sqrt{\langle x, b_3 \rangle^2 + \langle x, b_4 \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}((x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2)}.$$

b) Es sei $v + \alpha w \in g$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden. Der Abstand dieses Punktes zu U ist

$$\mathrm{d}(\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1-\alpha \\ 1+\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, U) = \sqrt{\frac{1}{2}(4(1+\alpha)^2 + 4\alpha^2)} = 2\sqrt{(\alpha + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}.$$

Dieser Abstand wird minimal für $\alpha = -1/2$, und damit ist

$$\mathrm{d}(g, U) = \mathrm{d}(v - \frac{1}{2}w, U) = 1.$$

II.3

Es sei Φ ein selbstadjungierter Endomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Für alle $x \in V,\ x \neq 0,$ gilt $\langle \Phi(x), x\rangle > 0$.

(ii) Alle Eigenwerte von Φ sind positiv.

Lösung:

Da Φ selbstadjungiert ist, können wir eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden. Es sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine solche ONB von V, und es gelte $\Phi(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$. Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von Φ.

Nun zeigen wir die Äquivalenz der Aussagen.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Es sei λ ein Eigenwert von Φ. Dann gibt es einen Index i mit $\lambda = \lambda_i$, und wir finden wegen (i):

$$\lambda = \lambda_i = \lambda_i \cdot \langle b_i, b_i\rangle = \langle \lambda_i b_i, b_i\rangle = \langle \Phi(b_i), b_i\rangle > 0,$$

da $b_i \neq 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Es sei $x \in V$ beliebig, aber von 0 verschieden. Wir schreiben x als Linearkombination der gewählten Eigenbasis:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Da x nicht der Nullvektor ist, ist mindestens ein Koeffizient von Null verschieden. Nun rechnen wir nach:

$$\langle \Phi(x), x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(b_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 > 0.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die b_i paarweise aufeinander senkrecht stehen (Übergang von der Doppelsumme zur einfachen Summe), und im letzten Schritt, dass alle λ_i positiv sind und mindestens ein α_i nicht 0.

II.4

Es sei $\Phi \neq \mathrm{Id}$ eine eigentliche Drehung des euklidischen Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$ mit Drehachse A und Drehebene U.

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ ist $\Phi(x) - x \in U$ und für den Abstand zur Drehebene U gilt $\mathrm{d}(x, U) = \mathrm{d}(\Phi(x), U)$.

b) Für Φ gelte zusätzlich

$$\Phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A, U,$ und den Cosinus des Drehwinkels von Φ.

Lösung:

a) Die Drehachse von Φ ist der Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1 und steht senkrecht auf der Drehebene, die ebenfalls unter Φ invariant ist. Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ lässt sich auf eindeutig bestimmte Art schreiben als

$$x = u + a, \ u \in U, \ a \in A.$$

Dann folgt aber wegen $\Phi(x) = \Phi(u) + \Phi(a) = \Phi(u) + a$

$$\Phi(x) - x = \Phi(u) + a - (u + a) = \Phi(u) - u \in U.$$

Außerdem ist (wieder wegen $\Phi(u) \in U$)

$$\mathrm{d}(x, U) = \mathrm{d}(a + u, U) = \|a\| = \mathrm{d}(a + \Phi(u), U) = \mathrm{d}(\Phi(x), U).$$

b) Aus a) folgt, dass die Vektoren

$$\Phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in U liegen. Da sie linear unabhängig sind, erzeugen sie U (das ja zweidimensional ist). Damit gilt

$$U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0\} \text{ und } A = U^\perp = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den Cosinus des Drehwinkels φ errechnet man durch die Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \Phi(u), u \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Sei gilt für jedes $u \in U \setminus \{0\}$, zum Beispiel für $u = (1 \ -1 \ 0)^\top$. Wir rechnen nach:

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \Phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das liefert mit obiger Formel $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$.

II.5

Es seien Φ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V und Φ^* der zu Φ adjungierte Endomorphismus. Weiter gelte für alle Vektoren $v \in V$ die Gleichung

$$\|\Phi(v)\| = \|\Phi^*(v)\|.$$

a) Zeigen Sie für alle $v \in V$ die Richtigkeit der Gleichung

$$\langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle = \langle \Phi^*(v), \Phi^*(w) \rangle.$$

b) Folgern Sie aus a), dass Φ normal ist.

Lösung:

a) Wie benutzen die Polarisierungsformel für reelle Skalarprodukte

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

Aus dieser folgt nämlich wegen der Linearität von Φ und Φ^* :

$$\begin{array}{rcl} \langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle & = & \frac{1}{2}(\|\Phi(v + w)\|^2 - \|\Phi(v)\|^2 - \|\Phi(w)\|^2) \\ & = & \frac{1}{2}(\|\Phi^*(v + w)\|^2 - \|\Phi^*(v)\|^2 - \|\Phi^*(w)\|^2) \\ & = & \langle \Phi^*(v), \Phi^*(w) \rangle \end{array}$$

b) Um zu zeigen, dass Φ normal ist, zeigen wir für alle $v \in V$:

$$\Phi^*(\Phi(v)) = \Phi(\Phi^*(v)).$$

Dies wiederum gilt, wenn für jedes $w \in V$ die Gleichung

$$\langle \Phi^*(\Phi(v)), w \rangle = \langle \Phi(\Phi^*(v)), w \rangle$$

gilt. Denn dann steht $\Phi^*(\Phi(v)) - \Phi(\Phi^*(v))$ auf jedem Vektor aus V senkrecht, ist also 0. Die letzte Gleichung wiederum folgt aus a) und der Definition der Adjungiertheit:

$$\langle \Phi^*(\Phi(v)), w \rangle = \langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle = \langle \Phi^*(v), \Phi^*(w) \rangle = \langle \Phi(\Phi^*(v)), w \rangle.$$

II.6

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ sei eine Quadrik Q gegeben durch

$$Q : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2(x_1 - x_2 + x_3) + 1 = 0.$$

Bestimmen Sie die Normalform von Q sowie eine Affinität, die die Gleichung in Normalform überführt.

Lösung:

Mit $t = x_1 + x_3$ und $v = x_2 - 1$ gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2(x_1 - x_2 + x_3) + 1 = t^2 + 2t + v^2,$$

und mit $u := t + 1$ ist das gleich

$$u^2 + v^2 - 1.$$

Die Quadrikennormalform ist demnach

$$\widetilde{Q} : x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

und eine Affinität mit der gewünschten Eigenschaft ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$