Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es sei $G := \{e, g_1, g_2, g_3\}$ eine 4-elementige Gruppe mit neutralem Element e. Die Verknüpfung auf G werde mit $\circ$ bezeichnet. Außerdem seien in G folgende Gleichungen erfüllt: $g_1 \circ g_1 = g_2$ und $g_1 \circ g_2 = g_3$.

a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel von G auf.

b) Es seien $(G, \circ)$ die Gruppe aus Teil a) und $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Menge aller Restklassen in $\mathbb{Z}$ modulo $5\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie, dass der einzige Gruppenhomomorphismus von $(G, \circ)$ nach $(\mathbb{Z}_5, +)$ die Abbildung

$$\Phi : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathbb{Z}_5 \\ g & \mapsto & 0 \end{array}$$

ist.

Lösung:

a) Aus der Definition des neutralen Elements, den beiden Gleichungen $g_1 \circ g_1 = g_2$ und $g_1 \circ g_2 = g_3$ sowie der Tatsache, dass jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auftaucht, ergibt sich

$\circ$	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3	e
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	e	g_1	g_2

als Verknüpfungstafel von $(G, \circ)$.

b) Sei $\Psi : G \rightarrow \mathbb{Z}_5$ ein Gruppenhomomorphismus, es gilt also auf jeden Fall $\Psi(e) = 0$.

Aus der Verknüpfungstafel liest man $g_2 \circ g_2 = e$ ab. Dann folgt $\Psi(g_2) + \Psi(g_2) = \Psi(e) = 0$. Das einzige Element in $\mathbb{Z}_5$, das dies erfüllt ist $\Psi(g_2) = 0$.

Aus $g_1 \circ g_1 = g_2$ folgt analog $\Psi(g_1) + \Psi(g_1) = \Psi(g_2) = 0$, also $\Psi(g_1) = 0$.

Aus $g_1 \circ g_2 = g_3$ folgt $\Psi(g_1) + \Psi(g_2) = \Psi(g_3)$, also $\Psi(g_3) = 0$.

Somit ist $\Psi = \Phi$.

Alternative: Wir sehen $g_1^2 = g_2, g_1^3 = g_2 \circ g_1 = g_3$ und $g_1^4 = g_2 \circ g_2 = e$. Daher ist $g_1 = g_1^5$ und es ergibt sich

$$f(g_1) = f(g_1^5) = 5f(g_1) = 0.$$

Insgesamt folgt $f(g_2) = 2f(g_1) = 0$ und $f(g_3) = 3f(g_1) = 0$. $f(e) = 0$ gilt ohnehin.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dessen Dimension mindestens 3 ist, und Φ ein Endomorphismus von V. Alle zweidimensionalen Untervektorräume von V seien Φ-invariant. Zeigen Sie:

a) Alle eindimensionalen Untervektorräume von V sind Φ-invariant.

b) Es gibt ein $c \in \mathbb{K}$, sodass $\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V$ ist.

Lösung:

a) Es sei U ein eindimensionaler Untervektorraum von V und $u \in U \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $U = [u]$. Wir wählen zwei weitere Vektoren $v, w \in V$, sodass u, v und w drei linear unabhängige Vektoren sind. Das geht, da $\dim(V) \geq 3$ vorausgesetzt ist. Nun setzen wir

$$U_1 := [u, v], \quad U_2 := [u, w].$$

Das sind dann zwei zweidimensionale Untervektorräume von V, deren Durchschnitt gerade U ist. Wieder nach Voraussetzung sind U_1 und U_2 unter Φ invariant. Daher gilt

$$\Phi(U) = \Phi(U_1 \cap U_2) \subset \Phi(U_1) \cap \Phi(U_2) \subset U_1 \cap U_2 = U.$$

Deshalb ist U unter Φ invariant.

b) Es sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor $\neq 0$. Dann gibt es nach Teil a) ein $c \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(v) = c \cdot v$. Wir müssen zeigen, dass für alle $w \in V$ gilt:

$$\Phi(w) = c \cdot w.$$

Das ist klar für $w \in [v]$.

Es sei also $w \in V \setminus [v]$, das heißt: v und w sind linear unabhängig.

Dann gibt es wegen a) ein $d \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(w) = d \cdot w$.

Wir müssen $c = d$ einsehen. Dazu betrachten wir $v + w$.

Wegen a) gibt es ein $e \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(v + w) = e \cdot (v + w)$.

Die Additivität von Φ erzwingt nun

$$0 = \Phi(v + w) - (\Phi(v) + \Phi(w)) = e \cdot (v + w) - (c \cdot v + d \cdot w) = (e - c) \cdot v + (e - d) \cdot w.$$

Da v und w linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$e - c = 0 = e - d, \quad \text{also} \quad c = e = d$$

wie gewünscht. Das zeigt

$$\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V.$$

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das die Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}] \subset \mathbb{R}^5$$

hat.

Lösung: Betrachten wir zunächst das homogene lineare Gleichungssystem, das durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Der Gauß-Algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \frac{1}{2} \\ \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \mid \frac{1}{3} \quad -1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -1 \mid \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ist

$$U' = [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}];$$

in Matrix-Schreibweise liest sich das wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

die Lösungsmenge

$$U = [\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

Wir müssen also nur noch ein $b \in \mathbb{R}^2$ finden mit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = b.$$

Ausmultiplizieren liefert

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Lösungstheorie für lineare Gleichungssystem ergibt sich dann sofort, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

die Lösungsmenge L hat.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U, W \subset V$ Untervektorräume von V und V^* der Dualraum von V. Dann ist die Menge

$$U^0 := \{x^* \mid x^* \in V^* \text{ und } x^*(y) = 0 \text{ für alle } y \in U\}$$

ein Untervektorraum von V^*. Zeigen Sie:

a) $\dim U + \dim U^0 = n$.

b) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.

Lösung:

a) Seien also $0 \leq \dim U = m \leq n$ und $\{x_1, \ldots, x_m\}$ eine Basis von U. Dann existieren Vektoren $x_{m+1}, \ldots, x_n \in V$, so dass $B := \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V ist. Es bezeichne $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die zu B duale Basis von V^* und $U' := [x_{m+1}^*, \ldots, x_n^*]$ den von $x_{m+1}^*, \ldots, x_n^*$ erzeugten Untervektoraum von V^*. Wir zeigen zunächst, dass $U' = U^0$ ist.

Sei $x^* \in U'$. Dann existieren $a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ mit $x^* = a_{m+1}x_{m+1}^* + \cdots + a_n x_n^*$. Nach Definition der dualen Basis gilt dann für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$x^*(x_i) = a_{m+1}x_{m+1}^*(x_i) + \cdots + a_n x_n^*(x_i) = 0,$$

also $x^*(y) = 0$ für alle $y \in U$. Damit ist $x^* \in U^0$.

Sei $y^* \in U^0$. Dann existieren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ mit $y^* = b_1 x_1^* + \cdots + b_n x_n^*$. Aus der Definition von U^0 und der Definition der dualen Basis ergibt sich dann für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$0 = y^*(x_i) = b_1 x_1^*(x_i) + \cdots + b_n x_n^*(x_i) = b_i,$$

also ist $y^* = b_{m+1}x_1^* + \cdots + b_n x_n^* \in U'$.

Somit ist $U^0 = U'$, und da $\dim U^0 = \dim U' = n - m = \dim V - \dim U$ ist, folgt die Behauptung.

Alternative: Wir betrachten den Vektorraumhomomorphismus

$$\Phi: \; V^* \to U^*, \quad x^* \mapsto x^*_{|U}$$

Dieser ist surjektiv und hat den Kern U^0. Daraus ergibt sich

$$\dim V^* \;=\; \dim \operatorname{Bild} \Phi + \dim \operatorname{Kern} \Phi \;=\; \dim U^* + \dim U^0.$$

Wegen $\dim V = \dim V^*$ und $\dim U = \dim U^*$ folgt

$$\dim V \;=\; \dim U + \dim U^0.$$

b)

$$
\begin{aligned}
(U+W)^0 &= \{x^* \in V^* \mid x^*(y) = 0 \text{ für alle } y \in U+W\} \\
&= \{x^* \in V^* \mid x^*(u+w) = 0 \text{ für alle } u \in U, w \in W\} \\
&= \{x^* \in V^* \mid x^*(u) = 0 \text{ für alle } u \in U \,\text{und}\, x^*(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\
&= \{x^* \in V^* \mid x^* \in U^0, x^* \in W^0\} \\
&= U^0 \cap W^0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe I.5 (4 Punkte)
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[2ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[2ex] 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und berechnen Sie

$$A^{10000} + A^{9999} - A^{9998}.$$

Lösung: Um zu zeigen, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, bestimmen wir zunächst ihre Eigenwerte. Es bezeichne p das charakteristische Polynom von A.

$$p = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & + & \phantom{\frac{1}{2}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - X & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[2ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} \\[2ex] 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - X & X & \frac{1}{2} \\[2ex] \frac{1}{2} & -X & \frac{1}{2} \\[2ex] 1 & 0 & -X \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} + \\[2ex] \\[2ex] \\ \end{array} = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\[2ex] \frac{1}{2} & -X & \frac{1}{2} \\[2ex] 1 & 0 & -X \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. n. 2. Sp.}}{=} -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\[2ex] 1 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 1) = -X(X-1)(X+1).$$

Also besitzt A drei verschiedene Eigenwerte, nämlich -1, 0 und 1, und ist damit diagonalisierbar.

Aus $p = -X^3 + X$ folgt mit Cayley-Hamilton $A^3 = A$, woraus sich aber direkt für alle $k \in \mathbb{N}$: $A^{2k} = A^2$ und $A^{2k+1} = A$ ergibt.

Somit ist

$$A^{10000} + A^{9999} - A^{9998} = A^2 + A - A^2 = A.$$

Alternative: A ist diagonalisierbar, also existiert eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} S^{-1}(A^{10000} - A^{9999} + A^{9998})S &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{10000} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{9999} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{9998} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aber:

$$A^{10000} - A^{9999} + A^{9998} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1} = A.$$

Aufgabe I.6 (4 Punkte)
Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & \dots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

Mit $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = -1$ ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \left(1 + n \cdot (-1)\right) = (-1)^{n+1}(n-1)$$