Lösungsvorschläge für die Klausur

LINEARE ALGEBRA (10. März 2005)

I.1

a) Es sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e_G.
Zeigen Sie, dass
$$U := \{g \in G \mid g^3 = e_G\}$$
eine Untergruppe von G ist.

b) In der symmetrischen Gruppe S_4 definieren wir analog zu a) die Teilmenge
$$T := \{\sigma \in S_4 \mid \sigma^3 = \mathrm{Id}\}.$$
Zeigen Sie:
T ist nichtleer, für jedes $\sigma \in T$ liegt auch σ^{-1} in T, aber T ist keine Untergruppe.

Lösung: a) Natürlich ist $e_G \in U$, denn $e_G^3 = e_G^2 = e_G$, also ist U nicht leer. Weiter ist mit $g \in U$ auch $g^{-1} \in U$, denn aus $g^3 = e_G$ folgt $g^{-1} = g^2$, und damit
$$(g^{-1})^3 = (g^2)^3 = g^6 = (g^3)^2 = e_G^2 = e_G.$$
Schließlich gilt für $g, h \in U$ auch (und nur hier braucht man die Kommutativität)
$$(gh)^3 = ghg \cdot \underbrace{hg}_{\text{vertauschen}} \cdot h = \underbrace{gh}_{\text{vertauschen}} \cdot gghh = hggghh = hg^3h^2 = he_Gh^2 = h^3 = e_G,$$
also auch $gh \in U$, und damit ist U nach dem Untergruppenkriterium eine Untergruppe.

b) Da man die Kommutativität von G im a)-Teil nur bei der Abgeschlossenheit von U unter der Multiplikation braucht, ist auch T nicht leer ($e_G \in T$) und unter Inversenbildung abgeschlossen.

Allerdings ist T nicht mehr unter Multiplikation abgeschlossen. Um das einzusehen geben wir 2 Elemente ζ und ξ von T an, deren Produkt nicht in T liegt. Wir geben sie durch eine Wertetabelle vor:
$$\zeta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \xi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Dieses sind Elemente in T. Es gilt hier
$$(\zeta \circ \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
und wir finden
$$(\zeta \circ \xi)^2 = \mathrm{Id}.$$
Also ist $(\zeta \circ \xi)^3 = \zeta \circ \xi \neq \mathrm{Id}$. Daher liegt $\zeta \circ \xi$ nicht in T, und dieses ist damit keine Untergruppe der S_4.

I.2

a) Es seien V ein Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V, sodass

$$\Phi^2 \circ (\mathrm{Id}_V - \Phi) = \Phi \circ (\mathrm{Id}_V - \Phi)^2 = 0.$$

Zeigen Sie, dass Φ eine Projektion ist.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und einen Endomorphismus Φ von V an, sodass $\Phi^2 \circ (\mathrm{Id}_V - \Phi) = 0$, aber $\Phi \neq \Phi^2$.

Lösung: a) Wir multiplizieren beide Ausdrücke aus. Dabei dürfen wir die binomische Formel benutzen, da Id_V und Φ miteinander vertauschen. Es folgen

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi^2 \circ (\mathrm{Id}_V - \Phi) = \Phi^2 - \Phi^3, \\ &\text{und} \\ 0 &= \Phi \circ (\mathrm{Id}_V - \Phi)^2 = \Phi - 2\Phi^2 + \Phi^3. \end{aligned}$$

Addiert man nun die jeweils letzten Ausdrücke dieser Gleichungen, so folgt

$$0 = (\Phi^2 - \Phi^3) + (\Phi - 2\Phi^2 + \Phi^3) = \Phi - \Phi^2,$$

also

$$\Phi^2 = \Phi,$$

was die definierende Relation für eine Projektion ist.

b) Es sei der Körper K beliebig und $V = K^2$. Der Endomorphismus Φ von V sei gegeben durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\Phi^2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist Φ^2 die Nullabbildung. Damit ist auch $\Phi^3 = \Phi \circ \Phi^2$ die Nullabbildung, und es gilt

$$\Phi^2 = \Phi^3.$$

Andererseits ist $\Phi^2 = 0 \neq \Phi$, also ist Φ keine Projektion.

I.3

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ betrachten wir zu einer gegebenen Zahl $a \in \mathbb{R}$ die Menge Q_a aller magischen Quadrate mit Zeilensumme a. Das sind diejenigen Matrizen

$$X := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

für die gilt:

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\} : \sum_{k=1}^{3} x_{ik} = \sum_{k=1}^{3} x_{kj} = x_{11} + x_{22} + x_{33} = x_{13} + x_{22} + x_{31} = a.$$

a) Zeigen Sie, dass Q_a genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $a = 0$ gilt.

b) Berechnen Sie die Dimension und eine Basis von Q_0.

c) Wieso gilt für alle $X \in Q_a$ die Gleichung $x_{22} = a/3$?

Lösung: a) Wenn Q_a ein Untervektorraum ist, dann liegt auch die Nullmatrix in Q_a, also muss $a = 0$ gelten.

Wenn umgekehrt $a = 0$ gilt, so liegt die Nullmatrix offensichtlich in Q_0, und Q_0 ist unter Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen. Daher ist Q_0 ein Untervektorraum.

b) Wir zeigen, dass $X \in Q_0$ durch x_{11} und x_{12} eindeutig festgelegt ist. Dazu wählen wir erst einmal zwei Matrizen $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ und $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in Q_0$ mit $b_{11} = 1$, $b_{12} = 0$ und $c_{11} = 0$, $c_{12} = 1$:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen B und C sind linear unabhängig. Wenn nun $X \in Q_0$ beliebig ist, so betrachten wir

$$Y := X - x_{11}B - x_{12}C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \in Q_0.$$

Nun zeigen wir sukzessive, dass die y_{ij} alle 0 sind. Für y_{13} ist das klar, wegen der ersten Zeilensumme. Wir setzen $s := y_{21}$. Dann ist $y_{31} = -s$ wegen der ersten Spaltensumme, also (wegen der Gegendiagonalen) $y_{22} = 0 - y_{13} - y_{31} = s$. Daraus folgt (wegen der Diagonalen) $y_{33} = 0 - 0 - y_{22} = -s$. Das wiederum ergibt aus der dritten Spalte $y_{23} = 0 - y_{13} - y_{33} = s$, also

$$3s = y_{21} + y_{22} + y_{23} = 0.$$

Daraus folgt $s = 0$ und insgesamt $Y = 0$.

Damit ist $X = x_{11}B + x_{12}C$, $\{B, C\}$ ist eine Basis von Q_0, und Q_0 ist zweidimensional.

c) Es sei $X \in Q_a$ für beliebiges a. In Q_a liegt auch die Matrix A, deren Einträge alle gleich $a/3$ sind. Die Matrix $Y := X - A$ liegt in Q_0, und ist damit eine Linearkombination der Matrizen B und C aus dem b)-Teil, also ist $y_{22} = 0$, und damit $x_{22} = a/3$.

I.4

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. In V seien die Polynome

$$p_k := (X+k)^k, \quad k \in \{0,1,2\}$$

gegeben. Diese bilden eine Basis $B := \{p_0, p_1, p_2\}$ von V.

a) Schreiben Sie $q = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in V$ als Linearkombination von p_0, p_1, p_2.

b) Es sei $B^* := \{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ die zu B duale Basis des Dualraums V^* von V. Schreiben Sie die Linearform

$$\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(q) := q(-1),$$

als Linearkombination von Φ_0, Φ_1, Φ_2.

Lösung: Zunächst berechnen wir die Polynome p_0, p_1, p_2 explizit:

$$p_0 = X^0 = 1, \quad p_1 = X+1, \quad p_2 = X^2 + 4X + 4.$$

a) Es ist

$$q - a_2p_2 = (a_1 - 4a_2)X + (a_0 - 4a_2) = (a_1 - 4a_2)p_1 + a_0 - a_1,$$

also

$$q = (a_0 - a_1)p_0 + (a_1 - 4a_2)p_1 + a_2p_2.$$

b) Es ist (in der eingeführten Notation für q) $\Psi(q) = q(-1) = a_0 - a_1 + a_2$. Andererseits sagt Teil a), dass

$$\Phi_0(q) = a_0 - a_1, \quad \Phi_1(q) = a_1 - 4a_2, \quad \Phi_2(q) = a_2,$$

denn $\Phi_i(q)$ ist gerade der Koeffizient vor p_i, wenn man q als Linearkombination von p_0, p_1, p_2 schreibt.

Aus der Gleichheit

$$\Psi(q) = a_0 - a_1 + a_2 = a_2 + (a_0 - a_1) = \Phi_2(q) + \Phi_0(q),$$

die für alle $q \in V$ gilt, folgt dann

$$\Psi = \Phi_2 + \Phi_0.$$

I.5

Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit

$$\mathrm{Rang}(A) = 1.$$

Weiter sei v eine von 0 verschiedene Spalte von A.

Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein $w \in K^n$, sodass $A = v \cdot w^\top$.

b) Die Spalte v ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Spur(A).

c) A ist diagonalisierbar genau dann, wenn Spur$(A) \neq 0$.

Lösung: Vorsichtshalber schreiben wir die Spalte v schon jetzt als $v := (v_1\ v_2 \dots v_n)^\top$. Weiter schreiben wir A als $A = (a_1\ a_2 \dots a_n)$, also bezeichne a_i die i-te Spalte von A.

a) Da A Rang 1 hat, sind je zwei Spalten linear abhängig. Also gibt es – da $v \neq 0$ vorausgesetzt ist – für $1 \leq i \leq n$ eine Zahl w_i, sodass $a_i = w_i \cdot v$. Damit folgt mit $w := (w_1\ w_2 \dots w_n)^\top$ die gewünschte Gleichung $A = v \cdot w^\top$.

b) Es gilt $A \cdot v = (v \cdot w^\top) \cdot v = v \cdot (w^\top \cdot v)$, also ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert

$$w^\top \cdot v = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i.$$

Andererseits gilt

$$A = v \cdot w^\top = (v_i w_j)_{1\leq i,j\leq n} \Longrightarrow \mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = w^\top \cdot v.$$

Das ist aber gerade der oben berechnete Eigenwert.

c) Der Rang von A ist 1, also hat der Kern von A die Dimension $n-1$.

Wenn A diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare Matrix S mit Eigenvektoren von A als Spalten. Wir wählen die ersten $n-1$ im Kern von A und finden

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(0, 0, \dots, 0, \lambda_n).$$

Dabei ist $\lambda_n \neq 0$, denn sonst wäre der Rang von A gleich 0, da dieser gleich dem Rang von $S^{-1}AS$ ist. Damit ist aber die Spur von A auch nicht 0, denn

$$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \lambda_n.$$

Wenn umgekehrt die Spur von A nicht 0 ist, dann ist v ein Eigenvektor zu einem Eigenwert ungleich 0, ergänzt also eine Basis des Kerns von A zu einer Basis von K^n, die aus Eigenvektoren besteht. Damit ist A diagonalisierbar.

I.6

Für die natürliche Zahl $n \geq 1$ sei A_n die reelle $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{falls } i = j-1, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ j^2 & \text{falls } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\det(A_n) = n!$.

Lösung: Erst einmal schreiben wir uns die Matrix A_n hin:

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-3)^2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (n-2)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & (n-1)^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir machen vollständige Induktion nach n und fangen an mit $\det(A_1) = 1 = 1!$ und

$$\det(A_2) = \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 2!, \quad \det(A_3) = \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}) = 1 + 4 + 1 = 3!$$

Nun setzen wir induktiv voraus, dass die behauptete Formel für alle A_k mit $k \leq n-1$ gilt. Dies haben wir für $n = 2, 3, 4$ gezeigt. Es folgt der Schritt von $n-1$ nach n. Dazu entwickeln wir $\det(A_n)$ nach der letzten Zeile und erhalten

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - (n-1)^2 \det(\widetilde{A_{n-1}}),$$

mit

$$\widetilde{A_{n-1}} := \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A_{n-2} & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0\ 0\ \dots 0\ (n-2)! & -1 \end{array}\right).$$

Durch Entwicklung der Determinante von $\widetilde{A_{n-1}}$ nach der letzten Spalte folgt wegen der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \det(A_{n-1}) + (n-1)^2 \det(A_{n-2}) = \\ &= (n-1)! + (n-1)^2 (n-2)! = [n-1 + (n-1)^2](n-2)! = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \\ &= n! \end{aligned}$$

II.1

a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

b) Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, für die $B^2 = A$ gilt?

Lösung: a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(XI - A) &= \det(\begin{pmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 1 & X+1 & 1 \\ -1 & -1 & X \end{pmatrix}) \\ &= (X^3 - X) + 1 + 1 - (X+1) + (X-1) + X = X^3. \end{aligned}$$

Also ist 0 der einzige Eigenwert von A. Da A den Rang 2 hat, ist der Kern eindimensional, also gibt es genau ein Jordankästchen von A zum Eigenwert 0. Dieses hat damit Länge 3, und die Jordan-Normalform $\widetilde{A}$ von A ist ein Jordankästchen:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Eine Matrix B mit den gewünschten Eigenschaften gibt es nicht.

Um das zu zeigen nehmen wir an, wir hätten so ein B gefunden.

Aus $B^2 = A$ folgte dann, dass $B^6 = A^3 = 0$, also wäre B nilpotent (oder äquivalent: das Minimalpolynom wäre ein Teiler von X^3), also wäre 0 der einzige Eigenwert von B. Der Rang von B wäre wegen

$$2 = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(B^2) \leq \text{Rang}(B)$$

mindestens 2. Damit wäre die Jordan-Normalform $\widetilde{B}$ von B dieselbe wie die von A.

Dann müsste aber $A = B^2$ zu $(\widetilde{B})^2$ ähnlich sein, was nicht sein kann, da

$$(\widetilde{B})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang 1 hätte, A hingegen Rang 2 hat.

II.2

Im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit den Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ mit $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} b_1$.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix einer $60°$-Drehung um die Achse $\mathbb{R} \cdot c_1$ bezüglich der Basis C an. ($\cos 60° = \frac{1}{2}$)

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Drehung aus b) bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Lösung: a) b_1 und b_2 stehen schon aufeinander senkrecht und müssen nur noch normiert werden. Den dritten Vektor sieht man natürlich sofort. Man kann ihn aber auch mit dem Verfahren von E. Schmidt berechnen durch Normierung von

$$\widetilde{c_3} := b_3 - \langle b_3, c_1 \rangle c_1 - \langle b_3, c_2 \rangle c_2.$$

Eine mögliche Orthonormalbasis, die c_1 enthält, besteht also z.B. aus

$$c_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Diese Matrix (oder ihre Transponierte – das hängt von den Vorlieben des Dozenten ab) ist

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Es sei A_{neu} die gesuchte Abbildungsmatrix und S die Basiswechselmatrix von der Standardbasis zur Basis C, also $S = (c_1 \; c_2 \; c_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Dann gilt nach Basiswechselformalismus

$$A = S^{-1} \cdot A_{\text{neu}} \cdot S, \quad \text{also} \quad A_{\text{neu}} = S \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Da C eine Orthonormalbasis ist, gilt hierbei $S^{-1} = S^\top$, also folgt:

$$\begin{aligned} A_{\text{neu}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Wählte man in b) die transponierte Matrix, so erhilete man hier auch die transponierte Matrix als A_{neu}.)

II.3

Es sei V der Vektorraum der reellen schiefsymmetrischen 3×3-Matrizen, also

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Auf $V \times V$ sei die Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \langle A, B \rangle := \operatorname{Spur}(A^\top \cdot B)$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

b) Für festes $A \in V$ ist die Abbildung

$$\Phi_A : V \longrightarrow V, \quad X \mapsto AX - XA,$$

ein Endomorphismus von V.

Zeigen Sie, dass $-\Phi_A$ der zu Φ_A bezüglich des Skalarprodukts aus Teil a) adjungierte Endomorphismus ist.

Lösung: a) Nachzuweisen sind Symmetrie und positive Definitheit der Bilinearform.

Für beliebige

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_3 \\ -b_2 & -b_3 & 0 \end{pmatrix} \in V$$

gilt

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \operatorname{Spur}(A^\top \cdot B) = \operatorname{Spur}(\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 & a_2b_3 & -a_1b_3 \\ a_3b_2 & a_1b_1 + a_3b_3 & a_1b_2 \\ -a_3b_1 & a_2b_1 & a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}) \\ &= 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3). \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich symmetrisch.

Weiter folgt

$$\langle A, A \rangle = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 0,$$

und der Wert 0 wird nur bei $A = 0$ angenommen. Damit ist die Bilinearform positiv definit.

b) Nachzurechnen ist die Gleichung

$$\forall X, Y \in V : \langle \Phi_A(X), Y \rangle = \langle X, -\Phi_A(Y) \rangle.$$

Wir formen sie durch Einsetzen der Definitionen des Skalarproduktes und des Endomorphismus Φ_A um zu

$$\forall X, Y \in V : \operatorname{Spur}((AX - XA)^\top \cdot Y) = \operatorname{Spur}(X^\top \cdot (YA - AY)).$$

Wir lösen die Klammern auf und benutzen die Additivität der Spur sowie $A^\top = -A$; das liefert

$$\forall X, Y \in V : \operatorname{Spur}(-X^\top AY) + \operatorname{Spur}(AX^\top Y) = \operatorname{Spur}(X^\top YA) - \operatorname{Spur}(X^\top AY).$$

Hier hebt sich der erste Term links gegen den zweiten Term rechts weg. Damit folgt die gesuchte Gleichheit (alle Umformungen waren Äquivalenzumformungen) aus der bekannten Eigenschaft $\operatorname{Spur}(CD) = \operatorname{Spur}(DC)$ für die Matrizen

$$C := A \text{ und } D := X^\top Y.$$

II.4

Es sei Φ eine lineare Isometrie eines vierdimensionalen euklidischen Vektorraums mit Determinante 1.

a) Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen a, b gibt, sodass das charakteristische Polynom von Φ das folgende Polynom ist:
$$X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1.$$
Tipp: Verwenden Sie die Isometrie-Normalform!

b) Nun sei Φ eine Isometrie eines euklidischen Vektorraums mit charakteristischem Polynom
$$\mathrm{CP}(\Phi, X) = X^4 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{5}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1.$$
Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform von Φ.

Lösung: a) Da die Determinante von Φ gleich 1 ist, muss die Vielfachheit des Eigenwerts -1 gerade sein. Da 4 gerade ist, muss damit auch die Vielfachheit des Eigenwerts 1 gerade sein, denn das orthogonale Komplement zur Summe der Eigenräume von 1 und -1 ist ein Vektorraum gerader Dimension. Wir erhalten damit für Φ eine Isometrie-Normalform
$$A := \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & c_2 \end{pmatrix},$$
wobei $c_1^2 + s_1^2 = c_2^2 + s_2^2 = 1$ gilt und s_1 oder s_2 auch Null sein dürfen.

Nun berechnet sich das charakteristische Polynom von Φ zu
$$\begin{aligned} \mathrm{CP}(\Phi, X) &= \mathrm{CP}(A, X) = (X^2 - 2c_1X + 1)(X^2 - 2c_2X + 1) = \\ &= X^4 - 2(c_1 + c_2)X^3 + (4c_1c_2 + 2)X^2 - 2(c_1 + c_2)X + 1, \end{aligned}$$
und wir finden die Behauptung mit $a := -2(c_1 + c_2)$, $b := 4c_1c_2 + 2$.

b) Nun sind $a = -3/2, b = 5/2$ gegeben, und wir müssen mit obigen Gleichungen die Werte c_1 und c_2 berechnen:
$$c_1 + c_2 = \frac{3}{4}, \quad c_1c_2 = \frac{1}{4}(\frac{5}{2} - 2) = \frac{1}{8}.$$
Setzen wie $c_2 = \frac{3}{4} - c_1$ in die zweite dieser Gleichungen ein, so folgt
$$c_1^2 - \frac{3}{4}c_1 + \frac{1}{8} = 0, \quad \text{also} \quad c_1 = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 4 \cdot \frac{1}{8}}}{2} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}.$$
Wir setzen $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$. (Die andere Wahl von c_1 vertauscht c_1 und c_2 nur.) Das gibt $s_1 := \sqrt{1 - c_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $s_2 := \sqrt{1 - c_2^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, wobei wir jeweils die positive Quadratwurzel wählen dürfen, denn der Drehwinkel ist nur bis aufs Vorzeichen festgelegt.

Die Normalform A von Φ ist also die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

II.5

Es sei $V \neq \{0\}$ ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Für einen Endomorphismus Φ von V sei

$$s := \sup_{x\in V, \|x\|=1} \|\Phi(x)\|.$$

Zeigen Sie:

a) Für jeden Eigenwert λ von Φ gilt $|\lambda| \leq s$.

b) Ist V endlichdimensional und Φ selbstadjungiert, so ist s oder $-s$ ein Eigenwert von Φ.

Lösung: a) Es sei λ ein Eigenwert von Φ und v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann ist auch $v_0 := \frac{v}{\|v\|}$ ein Eigenvektor zum selben Eigenwert, aber jetzt gilt $\|v_0\| = 1$.
Es folgt

$$s = \sup_{x\in V, \|x\|=1} \|\Phi(x)\| \geq \|\Phi(v_0)\| = \|\lambda v_0\| = |\lambda| \cdot \|v_0\| = |\lambda|.$$

b) Nun sei V endlichdimensional, $n := \dim(V)$, und Φ selbstadjungiert. Wir wählen eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von Φ. Dabei sei b_i Eigenvektor zum Eigenwert λ_i und es gelte

$$\forall i \in \{1, \ldots n\} : |\lambda_n| \geq |\lambda_i|.$$

Jetzt sei $x \in V, \|x\| = 1$. Wir schreiben x als Linearkombination der Basis auf:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Es folgt

$$\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i b_i, \sum_{j=1}^{n} c_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da die b_i eine Orthonormalbasis bilden. Nun berechnen wir $\|\Phi(x)\|^2$. Es ist ja jeder der Basisvektoren ein Eigenvektor, und wir finden

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x)\|^2 &= \langle \Phi(\textstyle\sum_{i=1}^n c_i b_i), \Phi(\sum_{j=1}^n c_j b_j)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n c_i \Phi(b_i), \sum_{j=1}^n c_j \Phi(b_j)\rangle \\
&= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i b_i, \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j b_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \lambda_i \lambda_j \langle b_i, b_j\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i^2 \quad \text{(selbes Argument wie eben)} \\
&\leq \textstyle\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_n^2 \quad \text{(weil } 0 \leq \lambda_i^2 \leq \lambda_n^2 \text{ und } c_i^2 \geq 0\text{)} \\
&= \lambda_n^2 \textstyle\sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda_n^2 \|x\|^2 \\
&= \lambda_n^2.
\end{aligned}$$

Damit gilt für das Supremum s : $s \leq |\lambda_n|$; wegen Teilaufgabe a) folgt $s = |\lambda_n| = \pm\lambda_n$.

Damit gilt $s = \lambda_n$ oder $-s = \lambda_n$, also ist s oder $-s$ ein Eigenwert.

II.6

Im $\mathbb{R}^3$ sei die Quadrik Q gegeben als

$$Q := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $P \in Q$ genau zwei affine Geraden durch P gibt, die in Q enthalten sind.

Lösung: Es sei $P = (p,\ q,\ r)^\top \in Q$, also

$$p^2 - q^2 + r = 0.$$

Wir legen durch P die affine Gerade $g := P + \mathbb{R} \cdot (x_0,\ y_0,\ z_0)^\top$. Nun wollen wir den Richtungsvektor bestimmen, sodass g ganz in Q liegt. Das ist äquivalent dazu, dass für all $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (p + tx_0)^2 - (q + ty_0)^2 + (r + tz_0) \\ &= p^2 + 2px_0t + x_0^2t^2 - q^2 - 2qy_0t - y_0^2t^2 + r + z_0t \\ &= (p^2 - q^2 + r) + (2px_0 - 2qy_0 + z_0)t + (x_0^2 - y_0^2)t^2. \end{aligned}$$

Notwendig und hinreichend dafür, dass dies für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Bedingung, dass alle Koeffizienten dieses Polynoms in der Unbestimmten t verschwinden, also

$$(p^2 - q^2 + r) = (2px_0 - 2qy_0 + z_0) = (x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

Der erste Ausdruck ist 0, da $P \in Q$ vorausgesetzt war.

Die Bedingung $x_0^2 - y_0^2 = 0$ ist gleichwertig mit $y_0 = \pm x_0$.

Im Fall $x_0 = y_0$ folgt aus der zweiten Bedingung

$$z_0 = 2(q - p)x_0,$$

und im Fall $x_0 = -y_0$ folgt

$$z_0 = -2(q + p)x_0.$$

Insbesondere darf x_0 nicht selbst Null werden, da sonst auch y_0 und z_0 verschwinden. Wir dürfen also $x_0 = 1$ normieren und finden die zwei Geraden

$$g_1 := P + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(q-p) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 := P + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2(q+p) \end{pmatrix}.$$