UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
UTE SCHULTE

4.September 2007

TEIL I der PROBEKLAUSUR zu

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE

Name, Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Fachrichtung: ____________________ Semester: ______

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die **Nummer der Aufgabe** sowie **Ihren Namen** schreiben.
Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie die Sätze genau. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.

Zur Auswertung: "Bestanden" haben Sie die Prüfung, wenn Sie in Teil I und Teil II zusammen 20 oder mehr Punkte erzielt haben. Dabei wird in jedem Teil diejenige Aufgabe, in der Sie am meisten Punkte erhalten haben, doppelt gewertet.

Punkte (wird von den Prüfern ausgefüllt!)						max	$\sum_I$	$\sum_{II}$	$\sum$	*Note*

$I.1$	$I.2$	$I.3$	$I.4$	$I.5$	$I.6$	
						$\Leftarrow$ Bitte kreuzen Sie **hier** an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

Aufgabe I. 1

Sei $(G,\cdot)$ *eine Gruppe.*

a) *Zeige, falls* U *eine endliche nichtleere Teilmenge von* G *ist, die unter "·" abgeschlossen ist (d.h.* $\forall x,y \in U:\ x\cdot y \in U$*), so ist* U *bereits eine Untergruppe.*

b) *Sei* $x,y \in G$ *mit* $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(y) = 2$.
Finden Sie drei Beispiele (d.h. $(G,\cdot),x,y$*), so dass* $\operatorname{ord}(x\cdot y)$ *jeweils einen anderen Wert annimmt.*

Aufgabe I. 2

Bezüglich einer Basis $\{b_1,b_2,b_3\}$ *eines dreidimensionalen reellen Vektorraums* V *sei zu jedem Paar* (η,ν) *reeller Zahlen ein Endomorphismus* Φ *von* V *durch*

$$\begin{array}{rcrcrcr} \Phi(b_1) & = & b_1 & + & \eta b_2 & + & \eta^2 b_3 \\ \Phi(b_2) & = & b_1 & + & \nu b_2 & + & \nu^2 b_3 \\ \Phi(b_3) & = & b_1 & + & b_2 & + & b_3 \end{array} \qquad b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

gegeben.

a) *Bestimmen Sie jeweils alle Paare* (η,ν)*, so dass der Vektor* $b_2 + \eta b_3$

- *kein Urbild*
- *genau ein Urbild*
- *unendlich viele Urbilder*

besitzt.

b) *Geben Sie die Darstellung von* Φ *für* $(\eta,\nu) = (-1,\frac{1}{2})$ *bezüglich der Standardbasis an.*

Aufgabe I. 3

Betrachten Sie den $\mathbb{Q}$*-Vektorraum* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

a) *Zeigen Sie, dass*
$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \\ & x & \mapsto & \sqrt{3}x \end{array}$$
ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

b) *Geben Sie eine Basis* B *von* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ *und* $D_{BB}(\Phi)$ *an.*

Aufgabe I. 4

Sei V *ein* n*-dimensionaler Vektorraum über dem Körper* K *und* $\Phi, \Psi \in V^\star \setminus \{0\}$. *Zeigen Sie:*

a) $\dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \dim(\mathrm{Kern}(\Psi)) = n - 1$

b) Φ, Ψ *sind genau dann linear abhängig, wenn* $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\Psi)$ *ist.*

c) *Sind* Φ, Ψ *linear unabhängig, so gilt* $\dim(\mathrm{Kern}(\Phi) \cap \mathrm{Kern}(\Psi)) = n - 2$

Aufgabe I. 5

Kreuzen Sie an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind. Es können pro Aufgabenteil auch mehrere Antworten richtig sein. Für jede richtige Antwort gibt es $\frac{1}{4}$ Punkt, für jede falsche Antwort wird $\frac{1}{4}$ Punkt abgezogen. Wird eine Frage nicht beantwortet, so zählt sie 0 *Punkte. Es können minimal* 0 *und maximal* 4 *Punkte erreicht werden.*

		Wahr	Falsch
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nilpotent. Dann gilt :	$\mathrm{Kern}(A^n) = \mathrm{Kern}(A^{n+1}) = \mathrm{Kern}(A^{n+2}) = \ldots$	○	○
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebig. Dann gilt :	$\mathrm{Kern}(A^n) = \mathrm{Kern}(A^{n+1}) = \mathrm{Kern}(A^{n+2}) = \ldots$	○	○
Alle Matrizen $A \in K^{6\times 6}$ mit	• $\mathrm{CP}_A(X) = (X-1)^4(X+2)^2$ und $\mathrm{MP}_A(X) = (X-1)^2(X+2)$	○	○
	• $\mathrm{CP}_A(X) = (X-1)^4(X+2)^2$ und $\mathrm{MP}_A(X) = (X-1)(X+2)$	○	○
sind einander ähnlich.	• $\mathrm{CP}_A(X) = (X-1)^4(X+2)^2$ und $\mathrm{MP}_A(X) = (X-1)^3(X+2)$	○	○
Sei $A \in K^{n\times n}, f \in K[X]$ mit $f(A) = 0$. Dann gilt :	• $\mathrm{MP}_A(X) \mid f$	○	○
	• $\mathrm{CP}_A(X) \mid f$	○	○
	• $f \mid \mathrm{CP}_A(X)$	○	○
Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ eine $\mathbb{C}$−lin. Abb. Dann gilt :	• f hat mind. einen EW	○	○
	• f hat zwei versch. EWe	○	○
	• f kann vier versch. EWe haben	○	○
	• f ist diagonalisierbar	○	○
Sei V ein reeller VR, $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f^5 = f$. Welche EWe kann f haben?	• 1	○	○
	• i	○	○
	• -1	○	○
	• $-i$	○	○
	• 0	○	○
	• $\sqrt{5}$	○	○

Aufgabe I. 6

a) *Geben Sie eine Definition der Determinantenabbildung an.*

b) *Gegeben sei die Matrix*

$$A(X) := \begin{pmatrix} 1-X & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2-X & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2-X \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von $A(X)$ und geben Sie das Ergebnis in Linearfaktoren zerlegt an.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
UTE SCHULTE

4.September 2007

TEIL II der PROBEKLAUSUR zu

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Fachrichtung: Semester:

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die **Nummer der Aufgabe** sowie **Ihren Namen** schreiben.
Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie die Sätze genau. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.

Zur Auswertung: "Bestanden" haben Sie die Prüfung, wenn Sie in Teil I und Teil II zusammen 20 oder mehr Punkte erzielt haben. Dabei wird in jedem Teil diejenige Aufgabe, in der Sie am meisten Punkte erhalten haben, doppelt gewertet.

Punkte (wird von den Prüfern ausgefüllt!)						max	$\sum_I$	$\sum_{II}$	$\sum$	*Note*

$II.1$	$II.2$	$II.3$	$II.4$	$II.5$	$II.6$	
						$\Leftarrow$ Bitte kreuzen Sie **hier** an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

Aufgabe II. 1

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom $CP_A(X) = (1 - X)^6$.

a) *Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform* J *von* A.

b) *Geben Sie eine reguläre Matrix* S *an, so dass* $J = S^{-1}AS$ *gilt.*

Aufgabe II. 2

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine symmetrische, positiv definite Matrix.*

a) *Zeigen Sie:* A *und* A^2 *haben die gleiche Anzahl an Eigenwerten. Jeder Eigenvektor von* A *ist Eigenvektor von* A^2 *und umgekehrt.*

b) *Geben Sie eine reelle symmetrische Matrix an, für die beide Aussagen in a) falsch sind.*

Aufgabe II. 3

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ und Ψ selbstadjungierte Endomorphismen von V. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathrm{Bild}(\Phi) \subseteq \mathrm{Kern}(\Psi)$

(ii) $\Phi \circ \Psi$ *ist die Nullabbildung*

(iii) $\mathrm{Bild}(\Phi) \perp \mathrm{Bild}(\Psi)$

Aufgabe II. 4

Es sei Φ eine Isometrie des euklidischen Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$ mit $\det(\Phi) = -1$.

a) *Zeigen Sie:*

(i) Φ *besitzt den Eigenwert* -1.

(ii) Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, so gilt $(\Phi(x)+x) \perp v$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^3$.

b) *Für Φ gelte zusätzlich*

$$\Phi(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+12\\ 6\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die (euklidische) Normalform der Isometrie Φ.

Aufgabe II. 5

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ *seien die Punkte*

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \; x_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

gegeben, sowie eine affine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $\Phi \circ \Phi = \Phi$ *(Projektion).*
Es gelte: $\Phi(x_1) = x_2, \quad \Phi(x_3) = x_4$

a) *Stellen Sie die affine Abbildung* Φ *bezüglich des Standardkoordinatensystems des* $\mathbb{R}^3$ *dar.*

b) *Berechnen Sie die Fixpunkte und Fixgeraden von* Φ.

Aufgabe II. 6

Im reellen dreidimensionalen affinen Standardraum $\mathbb{A}$ *sei eine Quadrik* Q *bezüglich der affinen Standardbasis* $\mathcal{S}$ *durch folgende Gleichung gegeben:*

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 1 = 0$$

a) *Bestimmen Sie die Form der Quadrik* Q *bezüglich der affinen Basis*

$$\mathcal{T} = \left(\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right)$$

b) *Bestimmen Sie die affine Normalform von* Q *und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an.*

UTE SCHULTE
http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~usku
ute.schulte@gmx.de

LÖSUNGEN TEIL I der PROBEKLAUSUR zu

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE

Lösung I. 1

a) *$U \neq \emptyset$ und U abgeschlossen unter "$\cdot$". Bleibt nur noch z.z.: $\forall x \in U : x^{-1} \in U$*

Sei $x \in U$. Da U endlich und abgeschlossen folgt $\{x^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq U$
$\Rightarrow \operatorname{ord}(x) < \infty$
$\Rightarrow$ *für $x = e \;\Leftrightarrow\; \operatorname{ord}(x) = 1$ folgt $x^{-1} = x \in U$ und*
für $x \neq e \;\Leftrightarrow\; \operatorname{ord}(x) > 1$ folgt $x^{-1} = x^{\operatorname{ord}(x)-1} \in U$

b) *<u>1. Möglichkeit:</u>* $x = y = y^{-1} \Leftrightarrow xy = e$

Beispiel: $x = y = 2 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \;\Rightarrow x + y = 0 \;\Rightarrow \operatorname{ord}(xy) = 1$

<u>2. Möglichkeit:</u> *$x \neq y$ und G abelsch* $\;\Rightarrow xyxy = x^2y^2 = e \Rightarrow \operatorname{ord}(xy) = 2$

Beispiel: $G = ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +), \quad x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ *andere Werte der Ordnung können nur für <u>G nicht abelsch</u> auftreten:*

Beispiele:

- $(S_3, \circ), \quad x = (1\ 2),\; y = (2\ 3)$
  $x \circ y = (1\ 2\ 3) \Rightarrow \operatorname{ord}(x \circ y) = 3$
- $(S_5, \circ), \quad x = (1\ 2)(3\ 4),\; y = (2\ 3)(4\ 5)$
  $x \circ y = (1\ 2\ 4\ 5\ 3) \Rightarrow \operatorname{ord}(x \circ y) = 5$
- $(GL_2(\mathbb{C}), \cdot), \quad x = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$
  $x \cdot y = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{ord}(x \cdot y) = \infty,$ *denn:*

$\mathrm{CP}_{x\cdot y}(X) = X^2 - 3X + 1$ *hat die Nullstellen* $X_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$\Rightarrow \mathrm{CP}_{x\cdot y}(X) = \mathrm{MP}_{x\cdot y}(X)$

Wäre $\mathrm{ord}(x \cdot y) = n$, *so wäre* $X^n - 1$ *annullierendes Polynom*

$\Rightarrow$ $X^n - 1$ *wäre Vielfaches von* $\mathrm{MP}_{x\cdot y}(X)$

$\Rightarrow$ *Nullstellen von* $\mathrm{MP}_{x\cdot y}(X)$ *müssten Nullstellen von* $X^n - 1$ *sein*

Widerspuch! *Denn* $X^n - 1$ *hat nur Nullstellen auf dem Einheitskreis und da die Nullstellen* $x_{1/2}$ *reell und ungleich* ± 1 *sind, liegen diese nicht auf dem Einheitskreis.*

Lösung I. 2

a) $D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta & \nu & 1 \\ \eta^2 & \nu^2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Löse LGS} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \eta & \nu & 1 & 1 \\ \eta^2 & \nu^2 & 1 & \eta \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \nu - \eta & 1 - \eta & 1 \\ 0 & 0 & (1-\eta)(1-\nu) & -\nu \end{array}\right)$$

Fallunterscheidung ergibt:

- *kein Urbild:* $(\eta = 1 \ \wedge \ \nu \neq 0) \ \vee \ (\nu = 1) \ \vee \ (\eta = \nu)$
- *genau ein Urbild:* $\eta \neq \nu \ \wedge \ \nu \neq 1 \ \wedge \ \eta \neq 1$
- *unendlich viele Urbilder:* $\eta = 1 \ \wedge \ \nu = 0$

b) $$D_{SS}(\Phi) = M_{SB} D_{BB} M_{SB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -30 & 21 & 21 \\ 10 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Lösung I. 3

a) • Φ *wohldefiniert, denn:*
z.z.: $\forall x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \Phi(x) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Sei $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \quad \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

$\Phi(x) = \sqrt{3}x = \sqrt{3}(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}) = a\sqrt{3}+b\sqrt{6}+3c+3d\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

• Φ *linear, denn:*
z.z.: $\forall x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}], \forall a \in Q: \ \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) \ \wedge \ \Phi(a \cdot x) = a \cdot \Phi(x)$

Seien $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}], \ a \in Q$.

$\Phi(x+y) = \sqrt{3}(x+y) = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y = \Phi(x) + \Phi(y)$

$\Phi(a \cdot x) = \sqrt{3}(a \cdot x) = a \cdot \sqrt{3}x = a \cdot \sqrt{3}x$

• Φ *bijektiv* $\overset{\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}])<\infty}{\Leftrightarrow}$ Φ *injektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \ \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid \sqrt{3}(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}) = 0\} = \{0\}$

b) $B := \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$

$$\Rightarrow D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung I. 4

a) $\underbrace{\dim(V)}_{=n} = \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}(\Phi))}_{=1, \text{ da } \Phi \neq 0} + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) \Rightarrow \dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = n - 1$

$\dim(\mathrm{Kern}(\Psi)) = n - 1$ *analog*

b)"$\Rightarrow$": $\Phi, \Psi \in V^\star \setminus \{0\}$ *l.a.* $\Leftrightarrow \ \exists a, b \in K^\times : \ a \cdot \Phi + b \cdot \Psi = 0$

(denn Φ, Ψ *l.a.* $\Leftrightarrow \ \exists a, b \in K$ *nicht beide* $0 : a\Phi + b\Psi = 0$

Œ $a \neq 0 \overset{\Phi \neq 0}{\Rightarrow} a \cdot \Phi \neq 0 \Rightarrow b \cdot \Psi \neq 0 \overset{\Psi \neq 0}{\Rightarrow} b \neq 0$*)*

$\Leftrightarrow \exists c \in K^\times : c \cdot \Phi = \Psi$

$x \in \mathrm{Kern}(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow c \cdot \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Kern}(\Psi)$

"$\Leftarrow$": $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\Psi) \Rightarrow \Phi|_{\mathrm{Kern}(\Phi)} = \Psi|_{\mathrm{Kern}(\Psi)} = 0$

$\dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = n-1 \overset{\text{Basisergänzungssatz}}{\Rightarrow}$ *Basis von* $V^\star$*:* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *mit*

$b_1 \notin \mathrm{Kern}(\Phi),\ b_2, \ldots, b_n \in \mathrm{Kern}(\Phi)$

$\Phi(b_1) \neq 0 \neq \Psi(b_1)$, *also* $\frac{\Phi(b_1)}{\Psi(b_1)} \in K^\times$

Also z.z.: $\Phi = \frac{\Phi(b_1)}{\Psi(b_1)}\Psi$

Zwei lineare Abbildungen sind gleich, wenn Basisvektoren einer beliebigen Basis auf dasselbe abgebildet werden.
Für b_1 *gilt:* $\Phi(b_1) = \frac{\Phi(b_1)}{\Psi(b_1)}\Psi(b_1) \Leftrightarrow \Phi(b_1) = \Phi(b_1)$

Für $b_2, \ldots, b_n$ *gilt:* $\underbrace{\Phi(b_i)}_{=0} = \frac{\Phi(b_1)}{\Psi(b_1)}\underbrace{\Psi(b_i)}_{=0} \Leftrightarrow 0 = 0$

$\Rightarrow \Phi = \frac{\Phi(b_1)}{\Psi(b_1)}\Psi$, *also* Φ, Ψ *l.a.*

c) Φ, Ψ *l.u.* $\overset{b)}{\Leftrightarrow} \mathrm{Kern}(\Phi) \neq \mathrm{Kern}(\Psi)$

Dimensionssatz:

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Kern}(\Phi) + \mathrm{Kern}(\Psi))}_{=\ n\quad (\star)} + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi) \cap \mathrm{Kern}(\Psi)) = \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}(\Phi))}_{=\ n-1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}(\Psi))}_{=\ n-1}$$

Also: $\dim(\mathrm{Kern}(\Phi) \cap \mathrm{Kern}(\Psi)) = (n-1) + (n-1) - n = n-2$

$(\star)$ *denn:* $\exists v \in \mathrm{Kern}(\Phi) : v \notin \mathrm{Kern}(\Psi)$, *also:* $< v > + \mathrm{Kern}(\Psi) = V$,
da: $\underbrace{\dim(< v >)}_{=1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}(\Psi))}_{=\ n-1} = n = \dim(V)$

Hier gilt übrigens auch die Umkehrung!

Lösung I. 5

		Wahr	Falsch
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nilpotent. Dann gilt :	$\mathrm{Kern}(A^n) = \mathrm{Kern}(A^{n+1}) = \mathrm{Kern}(A^{n+2}) = \dots$	$\times$	
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebig. Dann gilt :	$\mathrm{Kern}(A^n) = \mathrm{Kern}(A^{n+1}) = \mathrm{Kern}(A^{n+2}) = \dots$	$\times$	
Alle Matrizen $A \in K^{6\times 6}$ mit	• $\mathrm{CP}_A(X) = (X-1)^4(X+2)^2$ und $\mathrm{MP}_A(X) = (X-1)^2(X+2)$		$\times$
	• $\mathrm{CP}_A(X) = (X-1)^4(X+2)^2$ und $\mathrm{MP}_A(X) = (X-1)(X+2)$	$\times$	
	• $\mathrm{CP}_A(X) = (X-1)^4(X+2)^2$ und $\mathrm{MP}_A(X) = (X-1)^3(X+2)$	$\times$	
sind einander ähnlich.			
Sei $A \in K^{n\times n}, f \in K[X]$ mit $f(A) = 0$. Dann gilt :	• $\mathrm{MP}_A(X) \mid f$	$\times$	
	• $\mathrm{CP}_A(X) \mid f$		$\times$
	• $f \mid \mathrm{CP}_A(X)$		$\times$
Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ eine $\mathbb{C}-$lin. Abb. Dann gilt :	• f hat mind. einen EW	$\times$	
	• f hat zwei versch. EWe		$\times$
	• f kann vier versch. EWe haben		$\times$
	• f ist diagonalisierbar		$\times$
Sei V ein reeller VR, $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f^5 = f$. Welche EWe kann f haben?	• 1	$\times$	
	• i		$\times$
	• -1	$\times$	
	• $-i$		$\times$
	• 0	$\times$	
	• $\sqrt{5}$		$\times$

Lösung I. 6

a) *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Die Determinante ist dann definiert als normierte, alternierende Multilinearform von V^n nach K.*

b) *Mit Hilfe der Laplace-Entwicklung und Polynomdivision erhalten wir:*

$$\det(A(X)) = (X-1)^6$$

Viel Spaß beim Rechnen!

UTE SCHULTE
http://www.stud.uni-karlsruhe.de/∼usku
ute.schulte@gmx.de

LÖSUNGEN TEIL II der PROBEKLAUSUR zu

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE

Lösung II. 1

a) *Wir wissen bereits, dass die JNF folgende Gestalt hat:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star_5 & 1 \end{pmatrix}$

mit $\star_1, \ldots, \star_5 \in \{0, 1\}$

$$\textit{Berechne} \;\; \operatorname{Kern}(A - I_6) = < \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} > \Rightarrow \;\; J \textit{ hat zwei Kästchen,}$$

$$\textit{also} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{oder } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Berechne}\ \ \mathrm{Kern}(A-I_6)^2 = < \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} >$$

$\Rightarrow$ *J hat* $4-2=2$ *Kästchen der Größe* ≥ 2

Noch keine eindeutige Aussage über J machbar, also berechne
$\mathrm{Kern}(A-I_6)^3 = \mathrm{Kern}(0) = \mathbb{R}^6$
$\Rightarrow$ *J hat* $6-4=2$ *Kästchen der Größe* ≥ 3

$$\Rightarrow \mathrm{MP}_A(X) = (X-1)^3 \Rightarrow J = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

b) *Wähle* $b_1 \in \underbrace{\mathrm{Kern}(A-I_6)^3}_{=\mathbb{R}^6} \setminus \mathrm{Kern}(A-I_6)^2$, *z.B.* $b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow b_2 = (A-I_6)\cdot b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_3 = (A-I_6)^2\cdot b_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Wähle $b_4 \in \underbrace{\mathrm{Kern}(A-I_6)^3}_{=\mathbb{R}^6} \setminus (\mathrm{Kern}(A-I_6)^2 \ + \ < b_1 >)$, *z.B.* $b_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow b_5 = (A-I_6)\cdot b_4 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad b_6 = (A-I_6)^2\cdot b_4 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachrechnen: $A = SJS^{-1} \Leftrightarrow J = S^{-1}AS$

Lösung II. 2

a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *symmetrisch* $\Rightarrow \exists$ *orthogonale Matrix* S *mit*

$$S^T A S = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & c_1 & & & & & & \\ & & & c_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & c_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & & c_k & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & c_k \end{pmatrix} =: \tilde{A} \quad \text{(Es gilt } S^{-1} = S^T\text{)}$$

wobei $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *paarweise verschiedene Eigenwerte von* A *sind.*
A *positiv definit* $\Rightarrow c_1, c_2, \ldots, c_k > 0$

$$\begin{pmatrix} c_1^2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & c_1^2 & & & & & & \\ & & & c_2^2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & c_2^2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & & c_k^2 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & c_k^2 \end{pmatrix} = \tilde{A}^2 = (S^T A S)^2 = S^T A^2 S,$$

d.h. A^2 *ist diagonalisierbar und hat genau die Eigenwerte* $c_1^2, c_2^2, \ldots, c_k^2$. *Diese sind paarweise verschieden wegen:* $c_i^2 = c_j^2 \Leftrightarrow |c_i| = |c_j| \Leftrightarrow c_i = c_j$, *denn* $c_i, c_j > 0$.
Damit ist gezeigt, dass A *und* A^2 *die gleiche Anzahl an Eigenwerten haben.*

Sei nun v *ein Eigenvektor von* A *zum Eigenwert* c_i. *Dann gilt:*
$A^2v = A(Av) = Ac_iv = c_iAv = c_i^2v$, *d.h.* v *ist Eigenvektor von* A^2 *zum Eigenwert* c_i^2.
Mit $E_i :=$*Eigenraum von* A *zum Eigenwert* c_i, $\tilde{E}_i :=$*Eigenraum von* A^2 *zum Eigenwert* c_i^2 *gilt also:* $E_i \subseteq \tilde{E}_i \quad (\Rightarrow \dim(E_i) \leq \dim(\tilde{E}_i))$

noch zu zeigen: $E_i \supseteq \tilde{E}_i$
A *diagonalisierbar* $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$
A^2 *diagonalisierbar* $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \tilde{E}_i \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{n} \dim(\tilde{E}_i)$
Angenommen $E_i \not\supseteq \tilde{E}_i \Rightarrow \exists v \in \tilde{E}_i \setminus E_i \Rightarrow \dim(\tilde{E}_i) > \dim(E_i)$
$\Rightarrow n = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i) < \sum_{i=1}^{n} \dim(\tilde{E}_i) = n \quad$ *Widerspruch!*
Also: $E_i \supseteq \tilde{E}_i$

b) *Die gesuchte Matrix muss symmetrisch, aber darf nicht positiv definit sein. Betrachte z.B.* $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

A hat die Eigenwerte 1 *und* -1 *und die Eigenräume* $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ *und* $< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

A^2 *hat nur den Eigenwert* 1 *und den Eigenraum* $\mathbb{R}^2$, *d.h. insbesondere ist* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *EV von* A^2 *aber nicht EV von* A.

Lösung II. 3

Beweis durch Ringschluss: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.
Vorbemerkung: $\mathrm{Bild}(\Phi) \subseteq \mathrm{Kern}(\Psi) \Leftrightarrow \Psi \circ \Phi = 0 \quad (\star)$

$(i) \Rightarrow (ii)$ $\forall x, y \in V : \langle(\Phi \circ \Psi)(x), y\rangle \overset{\Phi \text{ selbstadj.}}{=} \langle\Psi(x), \Phi(y)\rangle \overset{\Psi \text{ selbstadj.}}{=} \langle x, (\Psi \circ \Phi)(y)\rangle \overset{(\star)}{=} 0$
Insbesondere gilt dies für $y := (\Phi \circ \Psi)(x)$, *also* $\langle(\Phi \circ \Psi)(x), (\Phi \circ \Psi)(x)\rangle = 0$
$\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ pos.def.}}{\Rightarrow} (\Phi \circ \Psi)(x) = 0 \overset{x\in V \text{ bel.}}{\Rightarrow} \Phi \circ \Psi = 0$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ *nach* (ii) *gilt:* $\forall x, y \in V : \langle \Psi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, \underbrace{(\Psi \circ \Phi)}_{\overset{(\star)}{=} 0}(y) \rangle = 0$

$\overset{x,y \text{ bel.}}{\Rightarrow} \operatorname{Bild}(\Phi) \perp \operatorname{Bild}(\Psi)$

$(iii) \Rightarrow (i)$ *z.z.:* $(\Psi \circ \Phi)(x) = 0 \ \forall x \in V$
$\forall x, y \in V : \langle (\Psi \circ \Phi)(x), y \rangle \overset{\Psi \text{selbstadj.}}{=} \langle \Phi(x), \Psi(y) \rangle \overset{(iii)}{=} 0$
Insbesondere gilt dies für $y := (\Psi \circ \Phi)(x)$, *also* $\langle (\Psi \circ \Phi)(x), (\Psi \circ \Phi)(x) \rangle = 0 \overset{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ pos.def.}}{\Rightarrow}$
$(\Psi \circ \Phi)(x) = 0 \Rightarrow$ *Behauptung*

Lösung II. 4

a) *(i) Die Isometrie* Φ *hat bezüglich einer ONB des* $\mathbb{R}^3$ *die (euklidische) Normalform*

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ 0 & \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

mit $a \in \{1, -1\}$ *und* $\omega \in [0, \pi]$.
Nach Voraussetzung ist $-1 = \det(\Phi) = \det(A_\Phi) = a(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = a$
$\Rightarrow a = -1$ *ist Eigenwert von* Φ.

(ii) Seien $x \in \mathbb{R}^3$ *beliebig und* $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ *mit* $\Phi(v) = -v$. *Dann gilt:*
$\langle \Phi(x) + x, v \rangle = \langle \Phi(x), v \rangle + \langle x, v \rangle \overset{\Phi \text{Isometrie}}{=} \langle \Phi(x), v \rangle + \langle \Phi(x), \underbrace{\Phi(v)}_{=-v} \rangle$
$= \langle \Phi(x), v \rangle - \langle \Phi(x), v \rangle = 0$, *also* $(\Phi(x) + x) \perp v \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

b) *Wir bestimmen zunächst einen Eigenvektor* v *von* Φ *zum Eigenwert* -1 *(existiert nach a) (i)).*
Wegen a) (ii) gilt:

$$v \perp y_1 := \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 12 \\ \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 3 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 3 \end{pmatrix}$$

$$v \perp y_2 := \Phi(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 12 \\ 6\sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 8 \\ 6\sqrt{2} + 10 \\ \sqrt{2} + 8 \end{pmatrix}$$

Also ist $v \in < y_1, y_2 >^\perp$.

Elementare Umformungen von $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+3 \\ \sqrt{2}+8 & 6\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ergeben: $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert* -1.

Nun bestimmen wir den Drehwinkel ω, *indem wir* $\Phi(w)$ *für einen geeigneten Vektor* w *aus* $< v >^\perp$ *(Drehebene) berechnen:*

$$w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v \rangle v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2} v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\langle v, w \rangle = 0$, *also* $w \in < v >^\perp$ *und*

$$\Phi(w) = \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2}v) = \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + \sqrt{2}\underbrace{\Phi(v)}_{=\,-v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \sqrt{2}v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

Wegen $||\Phi(w)|| = ||w|| = \sqrt{12}$ *gilt:*

$$\cos(\omega) = \frac{\langle w, \Phi(w) \rangle}{||w|| \cdot ||\Phi(w)||} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Die Normalform von Φ *hat damit die Gestalt:*

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lösung II. 5

a) *Es gilt:* $\Phi(x_1) = x_2 \Rightarrow x_2 = \Phi(x_1) = (\Phi \circ \Phi)(x_1)) = \Phi(x_2)$ *und*
$\Phi(x_3) = x_4 \Rightarrow x_4 = \Phi(x_3) = (\Phi \circ \Phi)(x_3)) = \Phi(x_4)$
$\Rightarrow$ x_2 *und* x_4 *sind Fixpunkte.*

Weiter gilt: $\Phi(x) = Ax + b$ *mit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *und* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\textit{Also:}\quad \Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a_{11}-a_{12}\\a_{21}-a_{22}\\a_{31}-a_{32}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

1. *Komponente:*

$$\begin{array}{lllcclll}
a_{11} & & & +b_1 & = & 0 & \backslash & & a_{11} = -1 \\
 & a_{12} & & +b_1 & = & 0 & / \Rightarrow a_{11} = a_{12} & & a_{12} = -1 \\
 & & a_{13} & +b_1 & = & 1 & & & a_{13} = 0 \\
a_{11} & -a_{12} & & +b_1 & = & 1 & & \Rightarrow b_1 = 1 &
\end{array}$$

2. *Komponente:*

$$\begin{array}{lllcclll}
a_{21} & & & +b_2 & = & 1 & \backslash & & a_{21} = 2 \\
 & a_{22} & & +b_2 & = & 1 & / \Rightarrow a_{21} = a_{22} & & a_{22} = 2 \\
 & & a_{32} & +b_2 & = & -1 & & & a_{32} = 0 \\
a_{21} & -a_{22} & & +b_2 & = & -1 & & \Rightarrow b_2 = -1 &
\end{array}$$

3. *Komponente:*

$$\begin{array}{lllcclll}
a_{31} & & & +b_3 & = & 0 & \backslash & & \\
 & a_{32} & & +b_3 & = & 0 & \Rightarrow a_{31} = a_{32} = a_{33} & & \Rightarrow a_{31} = a_{32} = a_{33} = 2 \\
 & & a_{33} & +b_3 & = & 0 & / & & \\
a_{31} & -a_{32} & & +b_3 & = & 0 & & \Rightarrow b_3 = 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\2 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

b) *Berechnung der Fixpunkte:*

x *Fixpunkt* $\Leftrightarrow \; \Phi(x) = x \; \Leftrightarrow Ax + b = x \; \Leftrightarrow \; (A - I_3)x = -b$

Also löse LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ *alle Punkte der Form* $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R}$ *sind Fixpunkte*

$\Rightarrow \; g := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R}\}$ *ist Fix***punkt***gerade*

Diese Fixpunktgerade ist auch die einzige Fixgerade, denn:

g *Fixgerade von* $\Phi \; \Leftrightarrow \; \Phi(g) = g \; \Leftrightarrow \; \Phi(p+ < r >) = p+ < r >$ *für* $g = p+ < r >$

$\Leftrightarrow \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \; \exists \mu \in \mathbb{R} : A(p + \lambda r) + b = p + \mu r$

$\Leftrightarrow \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \; \exists \mu \in \mathbb{R} : \underbrace{(A - I_3)p + b}_{\text{konstant in } \lambda \;\; \Rightarrow \; Ar = \tilde{\eta} r} = \underbrace{\mu r - \lambda A r}_{= \eta r}$

$\Leftrightarrow \; (A - I_3)p + b - \eta r = 0$

Berechne zunächst die Eigenwerte von A :

$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\text{0 ist doppelter EW}}_{\text{interessiert uns nicht weiter}}, \; \text{1 ist einfacher EW}$

Die folgende Berechnung muss man nun für jede Fixrichtung d.h. für jeden normierten EV zu jedem EW $\neq 0$ *machen. Da wir aber nur einen EW* $\neq 0$ *haben und, wie wir gleich sehen werden, der Eigenraum zu diesem Dimension 1 hat, hält sich das Rumgerechne in Grenzen.*

$$\mathrm{Eig}(A,1) =< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$\textit{Wähle } r = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A,1)$$

$$\Rightarrow \quad (A - I_3)p + b - \eta r = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\textit{Also löse LGS} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \; p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_2 \\ \Rightarrow \; \eta = 0 \\ \Rightarrow \; p_3 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Um die Anzahl der Fixgeraden in Richtung r *zu bestimmen, müssen wir* $\mathcal{L}$ *im Faktorraum* $\mathbb{R}^3/ < r >$ *betrachten. Da* $\mathcal{L}$ *dort einem Punkt entspricht, gibt es nur eine Fixgerade in diese Richtung.*

Lösung II. 6

a) *Die Quadrik bzgl. der Standardbasis hat folgende Form:*

$$x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=:b}{}^T x + \underbrace{1}_{=:c} = 0$$

Bezeichnen wir den affinen Basiswechsel von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{S}$ mit Φ, so gilt:

$$\Phi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:M} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:t}$$

Bezüglich unserer neuen Basis $\mathcal{T}$ hat die Quadrik dann die Form:

$$\Phi(x)^T \cdot A \cdot \Phi(x) + b^T \cdot \Phi(x) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (Mx+t)^T \cdot A \cdot (Mx+t) + b^T \cdot (Mx+t) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x^T M^T A + t^T A)(Mx+t) + b^T Mx + b^T t + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x^T M^T AMx + t^T AMx + x^T M^T At + t^T At + b^T Mx + b^T t + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x^T (M^T AM)x + (2t^T AM + b^T M)x + (t^T At + b^T t + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x^T \begin{pmatrix} -7 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}^T x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ -7x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_1 - 4x_2 + 6 = 0$$

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 1)^2 - 2x_2^2 - 4x_2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 + 4x_3 = 0$
$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 1)^2 - 2(x_2 - x_3 + 1)^2 + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 - 1))^2 - (x_2 - x_3 + 1)^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x_2 - x_3 + 1)^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 - 1))^2 - 1 = 0$

Mit $\tilde{x}_1 := x_2 - x_3 + 1$
$\tilde{x}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 - 1)$
$\tilde{x}_3 := x_3$

folgt die Normalform: $\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 - 1 = 0$

Dies ist übrigens ein hyperbolischer Zylinder.

Die zugehörige Koordinatentransformation ist gegeben durch:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$