

Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es seien (G, \circ) und $(H, *)$ Gruppen.

- Wann heißt eine Abbildung $\Phi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus?
- Es seien $\Phi, \Psi : G \rightarrow H$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$U := \{g \in G \mid \Phi(g) = \Psi(g)\}$$

eine Untergruppe von G ist.

- Es sei $G = H = S_3$ die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Finden Sie einen Homomorphismus $\Phi : S_3 \rightarrow S_3$, für den die Untergruppe

$$\{g \in S_3 \mid \Phi(g) = g\}$$

genau zwei Elemente enthält.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{2 \times 2} &\rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b-c & a-d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie Kern Φ .
- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und $\Pi : V \rightarrow V$ eine Projektion, das heißt ein Endomorphismus von V mit $\Pi^2 = \Pi$. Weiter sei $\Phi : \Pi(V) \rightarrow \Pi(V)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass für den durch $\Psi(x) := \Phi(\Pi(x))$, $x \in V$, definierten Endomorphismus von V gilt:

- $V = \text{Kern } \Psi \oplus \text{Bild } \Psi$.
- Ψ ist genau dann eine Projektion, wenn Φ die Identität ist.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} . Zu einem Untervektorraum U von V definieren wir den Untervektorraum

$$U^0 := \{x^* \in V^* \mid x^*(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

des Dualraums V^* von V . Es seien nun U, W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie:

- Für alle $w \in W \setminus \{0\}$ existiert ein $x^* \in U^0$, sodass $x^*(w) \neq 0$ ist.
- $V^* = U^0 + W^0$.
- $V^* = U^0 \oplus W^0 \iff V = U \oplus W$.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

- Zeigen Sie: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist A stets diagonalisierbar.
- Bestimmen Sie für $(a, b, c) = (1, 0, 7)$ die Diagonalform \tilde{A} von A , sowie eine Matrix S mit $S^{-1}AS = \tilde{A}$.
- Zeigen Sie: Für $(a, b, c) = (0, 1, i)$ ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle $n \times n$ -Matrix $A_n = (a_{ij})$ durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1 \text{ oder } j = 1 \\ a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & \text{für } i > 1 \text{ und } j > 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det A_n$ zunächst für $n = 5$ und dann allgemein.

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform \tilde{A} von A .
- Zeigen Sie, dass es keine zu A ähnliche Matrix B mit der Eigenschaft

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gibt.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $U \neq V$ ein Untervektorraum von V und Π die Orthogonalprojektion von V auf U . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $\dim U = \dim V - 1$.
- Für alle $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ und $\langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = 0$ gilt $x \in U$ oder $y \in U$.

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum \mathbb{R}^n versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus mit Abbildungsmatrix A bezüglich der Standardbasis.

- Zeigen Sie:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Phi(x) \rangle = 0) \implies A = -A^\top.$$

- Es seien $A = -A^\top$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

$$U \text{ ist } \Phi\text{-invariant} \iff U^\perp \text{ ist } \Phi\text{-invariant.}$$

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 (versehen mit dem Standardskalarprodukt) sei bezüglich der Standardbasis ein Endomorphismus Φ von \mathbb{R}^3 durch die Abbildungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie ist.
- Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Φ .
- Geben Sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 an, bezüglich der Φ die Normalform annimmt.

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es sei V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

- Für jeden normalen Endomorphismus Φ von V lässt sich der zu Φ adjungierte Endomorphismus Φ^* als Polynom von Φ schreiben. Genauer gilt:

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} : \Phi^* = \sum_{i=0}^n a_i \Phi^i.$$

- Sind Φ, Ψ zwei normale Endomorphismen mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$, so ist der Endomorphismus $\Phi \circ \Psi$ normal.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im reellen dreidimensionalen affinen Raum \mathbb{R}^3 sei bezüglich des Standardkoordinatensystems eine Quadrik \mathcal{Q} gegeben durch

$$\mathcal{Q} : 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

- Für welche $a \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $(0, 1, a)$ auf der Quadrik?
- Bestimmen Sie die affine Normalform von \mathcal{Q} und geben Sie ein affines Koordinatensystem an, bezüglich dessen \mathcal{Q} die Normalform annimmt.

Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es seien (G, \circ) und $(H, *)$ Gruppen.

- a) Wann heißt eine Abbildung $\Phi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus?
b) Es seien $\Phi, \Psi : G \longrightarrow H$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$U := \{g \in G \mid \Phi(g) = \Psi(g)\}$$

eine Untergruppe von G ist.

- c) Es sei $G = H = S_3$ die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Finden Sie einen Homomorphismus $\Phi : S_3 \longrightarrow S_3$, für den die Untergruppe

$$\{g \in S_3 \mid \Phi(g) = g\}$$

genau zwei Elemente enthält.

Lösung:

- a) Die Abbildung $\Phi : G \longrightarrow H$ ist ein Gruppenhomomorphismus von (G, \circ) nach $(H, *)$, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$\Phi(g_1 \circ g_2) = \Phi(g_1) * \Phi(g_2).$$

- b) Da Φ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H ; dasselbe gilt für $\Psi(e_G)$. Daher gilt $e_G \in U$, und U ist nicht leer.

Weiter gilt für $g \in U$ auch $\Phi(g^{-1}) = (\Phi(g))^{-1}$ (analog auch für Ψ),

$$\forall g_1, g_2 \in U : \Phi(g_1 \circ g_2^{-1}) = \Phi(g_1) * (\Phi(g_2))^{-1} \stackrel{g_1, g_2 \in U}{=} \Psi(g_1) * (\Psi(g_2))^{-1} = \Psi(g_1 \circ g_2^{-1}),$$

also $g_1 \circ g_2^{-1} \in U$.

Wir dürfen also das Untergruppenkriterium anwenden, und es folgt, dass U eine Untergruppe von G ist.

- c) Es sei $\tau \in S_3$ die Transposition, die 1 und 2 vertauscht:

$$\tau(1) := 2, \quad \tau(2) := 1, \quad \tau(3) := 3.$$

Es gilt $\tau^2 = \text{id} (= e_{S_3})$, und daher ist $U := \{\text{id}, \tau\}$ eine Untergruppe von S_3 mit zwei Elementen. Wir benutzen den Signaturhomomorphismus

$$\text{sgn} : S_3 \longrightarrow \{1, -1\}.$$

Es gilt $\text{sgn}(\tau) = -1$, und damit ist $\text{sgn}|_U$ ein Isomorphismus von U auf die Gruppe $\{1, -1\}$. Die Umkehrabbildung nennen wir Ξ .

Nun definieren wir den Homomorphismus $\Phi : S_3 \longrightarrow S_3$ als Komposition von Ξ und sgn :

$$\forall \sigma \in S_3 : \Phi(\sigma) := \Xi(\text{sgn}(\sigma)).$$

Dann gilt

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} \text{id}, & \text{falls } \text{sgn}(\sigma) = 1, \\ \tau, & \text{falls } \text{sgn}(\sigma) = -1, \end{cases}$$

und $\Phi(\sigma) = \sigma \Leftrightarrow \sigma = \text{id}, \tau$. Somit ist

$$\{\sigma \in S_3 \mid \Phi(\sigma) = \sigma\} = \{\text{id}, \tau\} = U.$$

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{2 \times 2} &\rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b-c & a-d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie Kern Φ .
- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Lösung:

- Aus der Definition von Φ ergibt sich sofort

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b-c & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b, b = c, c = d, d = a.$$

Also gilt:

$$\text{Kern } \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Wir bestimmen zunächst die Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich der geordneten Basis

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Einsetzen der einzelnen Basisvektoren in Φ liefert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Basiswechselmatrix von B zu B' ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und somit ist die Abbildungsmatrix \tilde{A} von Φ bezüglich B gerade

$$\tilde{A} = S^{-1}AS.$$

Mittels des Gauss-Algorithmus berechnet man

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und $\Pi : V \rightarrow V$ eine Projektion, das heißt ein Endomorphismus von V mit $\Pi^2 = \Pi$. Weiter sei $\Phi : \Pi(V) \rightarrow \Pi(V)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass für den durch $\Psi(x) := \Phi(\Pi(x))$, $x \in V$, definierten Endomorphismus von V gilt:

- a) $V = \text{Kern } \Psi \oplus \text{Bild } \Psi$.
- b) Ψ ist genau dann eine Projektion, wenn Φ die Identität ist.

Lösung:

- a) Φ ist injektiv, also gilt:

$$\Psi(x) = \Phi(\Pi(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Pi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{Kern } \Pi.$$

Somit ist $\text{Kern } \Psi = \text{Kern } \Pi$.

Φ ist außerdem surjektiv, woraus sofort $\text{Bild } \Psi = \Pi(V) = \text{Bild } \Pi$ folgt.

Da Π Projektion ist, gilt $V = \text{Kern } \Pi \oplus \text{Bild } \Pi$, und es folgt die Behauptung.

- b) Falls $\Phi = id_V$ ist, so gilt $\Psi = \Pi$, also ist Ψ Projektion.

Es sei also Ψ eine Projektion. Falls $\Phi \neq id_{\Pi(V)}$ gilt, so existiert ein $y \in \Pi(V)$ mit der Eigenschaft $\Phi(y) \neq y$. Da Φ injektiv ist, folgt daraus $\Phi(\Phi(y)) \neq \Phi(y)$. Weil außerdem $\Pi(z) = z$ für alle $z \in \Pi(V)$ ist, ergibt sich deshalb

$$\Psi^2(y) = \Phi(\Pi(\Phi(\Pi(y)))) = \Phi(\Phi(y)) \neq \Phi(y) = \Phi(\Pi(y)) = \Psi(y),$$

und Ψ wäre keine Projektion.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zu einem Untervektorraum U von V definieren wir den Untervektorraum

$$U^0 := \{x^* \in V^* \mid x^*(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

von des Dualraums V^* von V . Es seien nun U, W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie:

- Für alle $w \in W \setminus \{0\}$ existiert ein $x^* \in U^0$, sodass $x^*(w) \neq 0$ ist.
- $V^* = U^0 + W^0$.
- $V^* = U^0 \oplus W^0 \iff V = U \oplus W$.

Lösung: Sei $\dim V =: n$ in dieser Aufgabe.

- Wir ergänzen $w =: b_1$ zu einer Basis $\{b_1, \dots, b_p\}$ von W . Sei weiter $\{b_{p+1}, \dots, b_q\}$ eine Basis von U . Wegen $U \cap W = \{0\}$ ist dann die Vereinigung $\{b_1, \dots, b_q\}$ eine Basis von $U + W$. Wir ergänzen diese weiter zu einer Basis von V und erhalten $\{b_1, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_n\}$. Bezeichnen wir mit $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ die zugehörige Dualbasis des Dualraums V^* von V , so gilt:

$$b_1^*(w) = b_1^*(b_1) = 1 \neq 0 \text{ und } b_1^*(b_j) = 0 \text{ für } j = p+1, \dots, q.$$

. Damit ist $b_1^*(u) = 0$ für alle $u \in U$. Mit $x^* := b_1^*$ folgt also die Behauptung.

- Wegen $U^0, W^0 \subset V^*$ genügt es zu zeigen, dass $\dim(U^0 + W^0) = \dim V^* = n$ gilt. Aus dem Aufgabenteil (a) können wir folgern, dass $\{b_1^*, \dots, b_p^*, b_{q+1}^*, \dots, b_n^*\}$ eine Basis von U^0 ist: Einerseits liegen diese Vektoren alle in U^0 und sind linear unabhängig, andererseits lässt sich jede Linearform $\varphi \in U^0$ als Linearkombination $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*$ schreiben. Wegen $\lambda_j = \varphi(b_j) = 0$ für alle $j = p+1, \dots, q$ folgt die Zwischenbehauptung. Analog folgt, dass $\{b_{p+1}^*, \dots, b_n^*\}$ bzw. $\{b_{q+1}^*, \dots, b_n^*\}$ Basen von W^0 bzw. $U^0 \cap W^0$ sind. Mit dem Dimensionssatz ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \dim(U^0 + W^0) &= \dim U^0 + \dim W^0 - \dim(U^0 \cap W^0) \\ &= (n - \dim U) + (n - \dim W) - (n - \dim U - \dim W) = n. \end{aligned}$$

- Nach Aufgabenteil (b) ist die Aussage $V^* = U^0 \oplus W^0$ äquivalent zu $\dim(U^0 \cap W^0) = 0$. Dies ist aufgrund der Rechnung in (b) äquivalent zu $n = \dim U + \dim W$. Wegen der Voraussetzung $U \cap W = \{0\}$ gilt dies genau dann, wenn $V = U \oplus W$.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

- Zeigen Sie: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist A stets diagonalisierbar.
- Bestimmen Sie für $(a, b, c) = (1, 0, 7)$ die Diagonalform \tilde{A} von A , sowie eine Matrix S mit $S^{-1}AS = \tilde{A}$.
- Zeigen Sie: Für $(a, b, c) = (0, 1, i)$ ist A nicht diagonalisierbar.

Lösung:

- Die Matrix A ist reell und symmetrisch, somit ist A sogar über \mathbb{R} diagonalisierbar. (Spektralsatz!)
- Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet dann $\det(A - xE) = \dots = -(x + 6)(x - 1)(x - 8)$ und die Diagonalform ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S zu bestimmen, benötigen wir die Eigenräume. Diese kann man jedoch leicht erkennen, wenn man sich die Matrix A genau anschaut (ansonsten sind die Rechnungen auch nicht schwierig). Es gilt: $E_{-6} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$, $E_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ und $E_8 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

Wir können somit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen.

- Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet dann $\det(A - xE) = -x^3$. Das heißt, 0 ist der einzige Eigenwert von A . Da A offensichtlich nicht die Nullmatrix ist, kann A somit nicht diagonalisierbar sein.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle $n \times n$ -Matrix $A_n = (a_{ij})$ durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1 \text{ oder } j = 1 \\ a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & \text{für } i > 1 \text{ und } j > 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det A_n$ zunächst für $n = 5$ und dann allgemein.

Lösung: Zunächst gilt

$$\det A_1 = \det(1) = 1$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \end{array} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \end{array} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det A_2 = 1$$

Dies führt zu der Behauptung, dass $\det A_n = 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere die Berechnung von $\det A_3$ zeigt, wie man in einem Induktionsschluss $\det A_n$ aus $\det A_{n-1}$ berechnen kann. Wir führen dies aus und haben damit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung bewiesen.

$$\begin{aligned} \det A_n &= \det(a_{ij}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & i-1 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & i & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \vdots \leftarrow_+ \\ \vdots \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \\ \xrightarrow{-1} \leftarrow_+ \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \cdots & j-2 & j-1 & j & \cdots & n-1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\
0 & 1 & \cdots & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n-1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n-1}
\end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & \cdots & a_{i-2,n-1} \\
0 & 1 & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j} & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{pmatrix} = \det A_{n-1}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde jeweils die Rekursion verwendet, und zwar bei den Zeilenumformungen in der Form $a_{i,j} - a_{i-1,j} = a_{i,j-1}$ bzw. bei den Spaltenumformungen als $a_{i,j} - a_{i,j-1} = a_{i-1,j}$.

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform \tilde{A} von A .
b) Zeigen Sie, dass es keine zu A ähnliche Matrix B mit der Eigenschaft

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gibt.

Lösung:

- a) Für das charakteristische Polynom p von A gilt:

$$p = \begin{vmatrix} 2 - X & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} - X & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} - X & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 - X \end{vmatrix} = (1 - X)(2 - X)^3.$$

Der Jordanblock zum Eigenwert 1 hat also die Länge 1.

Der Eigenraum E_2 zum Eigenwert 2 ist Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat offensichtlich Rang 3, also gilt $\dim E_2 = 1$. Damit gibt es genau ein Jordankästchen im Jordanblock zum Eigenwert 2. Deshalb ist die Jordan'sche Normalform

\tilde{A} von A gegeben durch

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Da B ähnlich zu A sein soll, ist B auch ähnlich zu \tilde{A} . Es existiert also eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit der Eigenschaft $B = S^{-1}\tilde{A}S$. Für B^2 ergibt sich daraus $B^2 = S^{-1}\tilde{A}^2S$; B^2 ist also ähnlich zu \tilde{A}^2 , insbesondere haben also beide dieselbe Jordan'sche Normalform.

Nun gilt aber

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit besitzt \tilde{A}^2 das charakteristische Polynom $(1 - X)(4 - X)^3$.

In der Jordan'schen Normalform von \tilde{A}^2 (und B^2) hat der Jordanblock zum Eigenwert 4 also die Länge 3.

E_4 ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

hat also offensichtlich Dimension 1. Damit ist die Jordan'sche Normalform von \tilde{A} (und B^2) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da andererseits die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ebenfalls in Jordan'scher Normalform ist, und diese nicht mit der von \tilde{A} übereinstimmt, kann es keine zu A ähnlich Matrix mit der gesuchten Eigenschaft geben.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $U \neq V$ ein Untervektorraum von V und Π die Orthogonalprojektion von V auf U . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $\dim U = \dim V - 1$.
- Für alle $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ und $\langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = 0$ gilt $x \in U$ oder $y \in U$.

Lösung:

(a) \Rightarrow (b) Es gilt $V = U \oplus U^\perp$ und deshalb

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp = \dim V - 1 + \dim U^\perp.$$

Hieraus ergibt sich $\dim U^\perp = 1$. Seien nun $x, y \in V$ beliebig. Wegen $x = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$ gilt $\Pi(x) = u$ und $x - \Pi(x) = w \in U^\perp$. Ebenso ist $y - \Pi(y) \in U^\perp$.

Gilt nun

$$\langle x, y \rangle = \langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = 0,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y \rangle = \langle x - \Pi(x) + \Pi(x), y - \Pi(y) + \Pi(y) \rangle = \\ &\langle x - \Pi(x), y - \Pi(y) \rangle + \langle x - \Pi(x), \Pi(y) \rangle + \langle \Pi(x), y - \Pi(y) \rangle + \langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = \\ &\langle x - \Pi(x), y - \Pi(y) \rangle + \langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = \langle x - \Pi(x), y - \Pi(y) \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $x - \Pi(x), y - \Pi(y) \in U^\perp$ und $\dim U^\perp = 1$ sind $x - \Pi(x)$ und $y - \Pi(y)$ linear abhängig, sodass aus der letzten Gleichung $x - \Pi(x) = 0$ oder $y - \Pi(y) = 0$ folgt. Dies ist aber gleichbedeutend mit $x = \Pi(x) \in U$ oder $y = \Pi(y) \in U$.

(b) \Rightarrow (a) Wir müssen zeigen, dass $\dim U^\perp = 1$. Die Gleichung $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ liefert dann die Behauptung.

Wir nehmen $\dim U^\perp \neq 1$ an. Wegen $U \neq V$ ist dann $\dim U^\perp \geq 2$. Also gibt es $x, y \in U^\perp \setminus \{0\}$ mit $\langle x, y \rangle = 0$. Wegen $\Pi(x) = \Pi(y) = 0$ gilt $\langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = 0$. Nach Voraussetzung folgt damit $x \in U$ oder $y \in U$. Wegen $U \cap U^\perp = \{0\}$ ergibt sich $x = 0$ oder $y = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muss also $\dim U^\perp = 1$ gelten.

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum \mathbb{R}^n versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus mit Abbildungsmatrix A bezüglich der Standardbasis.

a) Zeigen Sie:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Phi(x) \rangle = 0) \implies A = -A^\top.$$

b) Seien $A = -A^\top$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

$$U \text{ ist } \Phi\text{-invariant} \iff U^\perp \text{ ist } \Phi\text{-invariant.}$$

Lösung:

a) Es bezeichne (e_1, e_2, \dots, e_n) die Standardbasis und $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\langle e_i, \Phi(e_j) \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_i, e_k \rangle = a_{ij} \langle e_i, e_i \rangle = a_{ij}.$$

Es gelte nun für alle $x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Phi(x) \rangle = 0$. Mit $x = e_i$ folgt hieraus direkt

$$0 = \langle e_i, \Phi(e_i) \rangle = a_{ii}.$$

Seien nun $1 \leq i < j \leq n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_i + e_j, \Phi(e_i + e_j) \rangle = \langle e_i + e_j, \Phi(e_i) + \Phi(e_j) \rangle = \\ &\langle e_i, \Phi(e_i) \rangle + \langle e_i, \Phi(e_j) \rangle + \langle e_j, \Phi(e_i) \rangle + \langle e_j, \Phi(e_j) \rangle = \\ &a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, mithin $A = -A^\top$.

b) \implies -Richtung: Es bezeichne Φ^* die zu Φ adjungierte Abbildung. Nach Voraussetzung gilt $\Phi^* = -\Phi$. Sei nun U Φ -invariant und $x \in U^\perp$ beliebig. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$\langle u, \Phi(x) \rangle = \langle \Phi^*(u), x \rangle = \langle -\Phi(u), x \rangle = \langle \Phi(-u), x \rangle = 0$$

da $\Phi(-u) \in U$. Also gilt $\Phi(x) \in U^\perp$.

\impliedby -Richtung: Wir haben eben gesehen dass, aus der Φ -Invarianz von U^\perp die Φ -Invarianz von $(U^\perp)^\perp$ folgt. Wegen $(U^\perp)^\perp = U$ folgt damit bereits die Behauptung.

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 (versehen mit dem Standardskalarprodukt) sei bezüglich der Standardbasis ein Endomorphismus Φ von \mathbb{R}^3 durch die Abbildungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie ist.
- Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Φ .
- Geben Sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 an, bezüglich der Φ die Normalform annimmt.

Lösung:

- Rechne nach $AA^T = E$.
- Berechne die Eigenwerte von

$$A + A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B :$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2(1 - \lambda) - \frac{1}{4}(1 - \lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

$\Phi + \Phi^*$ hat den Eigenwert 2 mit der Vielfachheit 1 $\Leftrightarrow \Phi$ hat den Eigenwert 1 mit der Vielfachheit 1.

$\Phi + \Phi^*$ hat den Eigenwert 1 mit der Vielfachheit 2 \Leftrightarrow in der Normalform von Φ tritt genau $2/2 = 1$ Drehkästchen der Gestalt $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ auf. Die Normalform von Φ lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Sei $E_{c=2}$ der Eigenraum von $\Phi + \Phi^*$ zum EW 2, dann ist $\{x_1\}$ mit $x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$ eine ONB von $E_{c=2}$ (Bestimme dazu $\text{Kern}(B - 2E) = \text{Kern}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$). $\{x_1\}$ ist eine ONB des Eigenraums $E_{c=1}$ von Φ zum EW 1.

Wir bestimmen nun ein v_2 im Eigenraum von $\Phi + \Phi^*$ zum EW 1 mit $\|v_2\| = 1$:

$$\text{Kern}(B - 1 \cdot E) = \text{Kern}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} =: v_2 \right]. \text{ Sei } v_3 := \Phi(v_2) =$$

$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2})^\top$. Wir ergänzen nun $x_2 := v_2$ mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu einer ONB $\{x_2, x_3\}$ von $[v_2, v_3]$. Es ergibt sich $x_3 = (0, 0, 1)^\top$. Die gesuchte ONB lautet also

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es sei V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

- a) Für jeden normalen Endomorphismus Φ von V lässt sich der zu Φ adjungierte Endomorphismus Φ^* als Polynom von Φ schreiben. Genauer gilt:

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} : \Phi^* = \sum_{i=0}^n a_i \Phi^i.$$

- b) Sind Φ, Ψ zwei normale Endomorphismen mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$, so ist der Endomorphismus $\Phi \circ \Psi$ normal.

Lösung:

- a) Da Φ normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren (Spektralsatz für normale Endomorphismen). Wir wählen solch eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$, und bezeichnen mit $c_j \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \Phi(b_j) = c_j b_j.$$

Bekanntlich gilt für die adjungierte Abbildung Φ^* dann

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \Phi^*(b_j) = \bar{c}_j b_j,$$

wobei \bar{c}_j die zu c_j konjugiert komplexe Zahl ist.

Wegen der Lagrange-Interpolationsformel gibt es ein komplexes Polynom $\sum_{i=0}^n a_i X^i$, das ausgewertet bei den Zahlen c_j die Werte \bar{c}_j annimmt.

Dann gilt für jeden Basisvektor b_j :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \Phi^i \right) (b_j) = \sum_{i=0}^n a_i (\Phi^i(b_j)) = \sum_{i=0}^n a_i (c_j^i \cdot b_j) = \left(\sum_{i=0}^n a_i c_j^i \right) \cdot b_j = \bar{c}_j \cdot b_j = \Phi^*(b_j).$$

Die zwei Endomorphismen Φ^* und $\sum_{i=0}^n a_i \Phi^i$ stimmen also auf einer Basis überein, und sind damit gleich.

- b) Aus $\Phi \circ \Psi$ folgt per Induktion sofort, dass für alle ganzen Zahlen $i \geq 0$ gilt:

$$\Phi^i \circ \Psi = \Psi \circ \Phi^i.$$

Nach Teil a) können wir Φ^* schreiben als $\sum_{i=0}^n a_i \Phi^i$, für geeignete $a_i \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \Phi^* \circ \Psi &= \left(\sum_{i=0}^n a_i \Phi^i \right) \circ \Psi = \sum_{i=0}^n a_i (\Phi^i \circ \Psi) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (\Psi \circ \Phi^i) = \Psi \circ \left(\sum_{i=0}^n a_i \Phi^i \right) \\ &= \Psi \circ \Phi^*. \end{aligned}$$

Analog gilt auch $\Phi \circ \Psi^* = \Psi^* \circ \Phi$. Das führt zu

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi) \circ (\Phi \circ \Psi)^* &= (\Phi \circ \Psi) \circ (\Psi^* \circ \Phi^*) = \Psi^* \circ (\Phi \circ \Psi) \circ \Phi^* \\ &= \Psi^* \circ \Phi^* \circ (\Phi \circ \Psi) \\ &= (\Phi \circ \Psi)^* \circ (\Phi \circ \Psi), \end{aligned}$$

und das sagt laut Definition gerade, dass $\Phi \circ \Psi$ normal ist.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

In einem reellen dreidimensionalen affinen Raum

\mathbb{R}^3 seien bezüglich des Standardkoordinatensystems eine Quadrik \mathcal{Q} gegeben durch

$$\mathcal{Q} : 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

- (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $(0, 1, a)$ auf der Quadrik?
- (b) Bestimmen Sie die affine Normalform von \mathcal{Q} und geben Sie ein affines Koordinatensystem an, bezüglich dessen \mathcal{Q} die Normalform annimmt.

Lsung:

(a): $(0, 1, a) \in \mathcal{Q} \iff 2 - a^2 + 2 + 2a = 0 \iff a^2 - 2a - 4 = 0 \iff a = 1 \pm \sqrt{5}.$

(b): Normalform von \mathcal{Q} :

$$2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

Quadratische Ergänzung ergibt

$$2[x_2^2 + x_2(x_1 + 1) + (\frac{x_1 + 1}{2})^2] - 2(\frac{x_1 + 1}{2})^2 - [x_3^2 + 2x_3(x_1 - 1) + (x_1 - 1)^2] + (x_1 - 1)^2 + 2x_1 = 0$$

Daraus folgt

$$2(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2})^2 - (x_3 + x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 2x_1 + 1)^2 = 0,$$

also

$$2(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2})^2 - (x_3 + x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 = 0.$$

Mittels der affinen Abbildung φ , die durch

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{2}(\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_3 &= x_1 + x_3 - 1 \end{aligned}$$

gegeben ist, erhalten wir die Normalform von $\varphi(\mathcal{Q})$ im gegebenen Koordinatensystem

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0,$$

also ist \mathcal{Q} ein Kegel.

\mathcal{Q} selbst nimmt diese Normalform bezüglich des neuen Koordinatensystems $(\varphi^{-1}(O); \Phi^{-1}(e_1), \Phi^{-1}(e_2), \Phi^{-1}(e_3))$ an, wobei Φ die zu φ gehörende lineare Abbildung ist.

Bezüglich der Standardbasis gehört zu Φ die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also zu Φ^{-1} die Abbildungsmatrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für φ^{-1}

$$\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix} = A^{-1}x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit lautet das gesuchte Koordinatensystem

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$