Informatik IV
im Sommersemester 2005
Mittwoch, 8. Juni

IBDS Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Gebäude 50.34, Am Fasanengarten 5

Übungsblatt Nr. 9

Abgabe bis 15. Juni

Pro Blatt wird nur eine – vorbestimmte – Aufgabe korrigiert und gewertet. Bitte schreiben Sie ***groß hervorgehoben*** *die Gruppennummer Ihres Tutoriums auf Ihre zusammengehefteten (!) Lösungsblätter.*

Aufgabe 30

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$H(p_1, ..., p_n) \quad = \quad -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ tatsächlich die vier Axiome erfüllt, auf die Chintschin (1953) und Faddejew (1956) das Shannon'sche Informationsmaß H zurückgeführt haben:

a)

$$m < n \qquad \Leftrightarrow \qquad H\Big(\frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m}\Big) \; < \; H\Big(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\Big)$$

b)

$$H\Big(\frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m}\Big) \; + \; H\Big(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\Big) \quad = \quad H\Big(\frac{1}{mn}, ..., \frac{1}{mn}\Big)$$

c)

$$H(p_1, ..., p_r, p_{r+1}, ..., p_n) \quad = \quad H(a, b) + a \cdot H\Big(\frac{p_1}{a}, ..., \frac{p_r}{a}\Big) + b \cdot H\Big(\frac{p_{r+1}}{b}, ..., \frac{p_n}{b}\Big)$$

$$\text{mit} \qquad a = \sum_{i=1}^{r} p_i \qquad \text{und} \qquad b = \sum_{i=r+1}^{n} p_i \qquad (a + b = 1)$$

(Tip: strukturelle Induktion)

d) $H(p, 1 - p)$ ist stetig in p

Aufgabe 31

a) Beweisen Sie, daß der Wert $p = 1/2$ die Shannon-Information

$$H(p, 1 - p)$$

einer binären Quelle maximiert.

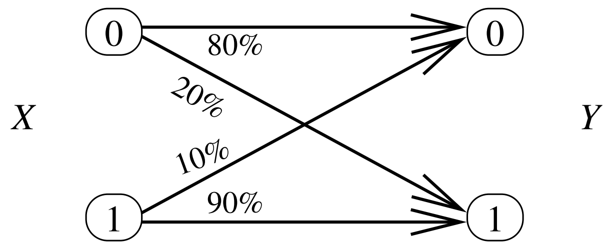
b) Leiten Sie her, wie es zur Formel für die Kapazität des binären symmetrischen Übertragungskanals mit Fehlerwahrscheinlichkeit β kommt ($0 \leq \beta \leq 1$):

$$C_{\text{sym}} \quad = \quad 1 + \beta \log \beta + (1 - \beta) \log(1 - \beta)$$

Sie dürfen nur die Übertragungswahrscheinlichkeiten $p(y|x)$ für die Ausgabe $y \in Y = \{0, 1\}$ in Abhängigkeit von der Eingabe $x \in X = Y$ und die Definition des Shannon-Informationsmaßes $H(p_1, ..., p_n) := -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ als bekannt voraussetzen, ferner Formeln für die Transinformation $H(X;Y)$.

Aufgabe 32 ***wird korrigiert:*** $\frac{1}{2}$***+1+1***$\frac{1}{2}$***+2+1+2+2+0=10 Punkte***

Studieren Sie den Fall eines asymmetrischen binären Kanals mit Quelle X und Empfang Y. Die Übertragungswahrscheinlichkeiten $P(Y|X)$ seien durch das folgende Diagramm gegeben:



a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Bitkette "1100" als "1001" übertragen wird?

b) Wenn die Quelleninformation $H(X) = 1$ bit ist, wie groß ist dann $H(Y)$?

c) Wie groß muß $H(X)$ sein, damit $H(Y) = 1$ bit wird?

d) Ermitteln Sie eine Quellenstatistik $P(X = x)$, für die $H(X) = H(Y)$ wird.

Durch die Quellenstatistiken $P(X = x)$ aus b), c) und d) sind drei verschiedene "Betriebsmodi" desselben Kanals festgelegt. Die folgenden Berechnungen sollen für alle drei Modi angestellt werden:

e) Wie groß ist die Gesamtinformation $H(X, Y)$ des Übertragungssystems?

f) Wie groß ist die Fehlinformation $H(Y|X)$?

Wie groß ist die Äquivokation $H(X|Y)$?

g) Wie groß ist schließlich die Transinformation $H(X;Y)$?

h) Wie groß ist die Kanalkapazität C dieses asymmetrischen Kanals?

(Angabe bitte auf vier Nachkommastellen genau; wenn es nicht algebraisch klappt, notfalls unter Zuhilfenahme numerischer Verfahren)

Aufgabe 33

Es sei eine Informationsquelle Q gegeben, die mit dem binären Alphabet $A = \{0, 1\}$ sukzessiv Zeichen aus der periodischen Folge

$$\cdots\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\ \cdots$$

ausgibt. Bestimmen Sie den Informationsgehalt eines zum Zeitpunkt t ausgegebenen Zeichens X_t,

a) wenn kein vorhergehendes Zeichen bekannt ist. Wir haben in diesem Fall also einen Empfänger ohne Gedächtnis, der daher nicht die Periodizität der Eingabe erkennen kann.

b) wenn ein vorhergehendes Zeichen X_{t-1} bekannt ist.

c) wenn zwei vorhergehende Zeichen X_{t-1}, X_{t-2} bekannt sind.

d) wenn drei vorhergehende Zeichen $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}$ bekannt sind.

Erbauliches zum Einstein-Jahr 2005, Folge 9:

"Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr."