

## Übungsblatt Nr. 12

Abgabe bis 6. Juli

### Aufgabe 41

Ein Bitstrom  $X$ , bei dem mit Wahrscheinlichkeit  $\beta \gg \frac{1}{2}$  Nullen auftreten, werde ebenfalls in einen Bitstrom  $Y$  transformiert:

$X$  :      $\dots 000001000000100100000000000001000000000010000000 \dots$

$Y$  :      $\dots 01011110111110101100101 \dots$

Um zu komprimieren, soll  $Y$  naheliegenderweise eine Lauflängenkodierung von  $X$  sein:

$X$  :      $\dots 000001 \underbrace{0000001}_{0111} \underbrace{001}_{1011} \underbrace{0000000000}_{11} \underbrace{0001}_{1010} \underbrace{0000000000}_{11} \underbrace{01}_{001} 0000000 \dots$

Es werden also immer Metazeichen der Form  $x = 0^n1$  Huffman-kodiert.

a) Stellen Sie eine Kodierungstabelle für die Metazeichen  $0^n1$  auf.

Wählen Sie für das maximale  $n$  den Wert  $n_{\max} = 9$ . Berechnen Sie zunächst die Auftrittswahrscheinlichkeiten für die Metazeichen (Wörter der Eingabe)  $1, 01, 001, \dots, 0^{n_{\max}}1$  und  $0^{n_{\max}}0$ , wenn  $\beta = 85\%$  gewählt wird. (Es genügt, wenn Sie mit vier Nachkommastellen rechnen.)

Gehen Sie so vor, daß (bei Verzweigungen von zwei Huffman-Kodewörtern mit gleichem Präfix) stets die unwahrscheinlichere Alternative mit "0" und die wahrscheinlichere mit "1" kodiert wird. Hierdurch wird die Kodierungstabelle eindeutig festgelegt.

b) Die Ausgabe – der von Ihnen ermittelte Huffman-Kode – sei mit  $Y$  bezeichnet. Berechnen Sie die (relative) Redundanz von  $Y$  und vergleichen Sie sie mit der Redundanz des ursprünglichen Bitstroms (der Eingabe)  $X$ .

c) Wählen Sie nun  $\beta = 90\%$  und wieder  $n_{\max} = 9$ . Ermitteln Sie einen Huffman-Kode für die Lauflängenkodierung.

Wie groß ist nun die relative Redundanz der Ausgabe  $Y$ ?

d) Was passiert für  $n_{\max} \rightarrow \infty$ ?

**Aufgabe 42** *wird korrigiert:  $\frac{1}{2}+3+3+3+\frac{1}{2}$  bzw.  $4+2+4=10$  Punkte*

Wir bieten wieder zwei alternative Aufgabenstellungen an. Es muß nur eine der beiden Alternativen korrekt bearbeitet sein, um volle Punktzahl zu erlangen.

**Alternative 1:** Multiplizieren Sie zwei in Koeffizientendarstellung gegebene Polynome

$$f_1(x) = 3x + 2 \quad \text{und} \quad f_2(x) = -2x^2 + x + 3$$

mithilfe der Schnellen Fouriertransformation (FFT).

- Wie viele Stufen ( $\log n$ ) muß Ihr FFT-Schema haben?  
Wieviele ( $n$ ) Stützstellenwerte  $\omega^i$  benötigen Sie?  
Welchen Wert hat also  $\omega$ ?
- Transformieren Sie  $f_1$  durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung.
- Transformieren Sie  $f_2$  durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung.
- Multiplizieren Sie die Werte von  $f_1$  und  $f_2$  an den Stützstellen miteinander.  
Transformieren Sie das so erhaltene Produkt durch rückwärts-FFT wieder in Koeffizientendarstellung.
- Welches Ergebnis bekommen Sie, wenn Sie die gegebenen Polynome ohne FFT multiplizieren? (Proberechnung)

**Alternative 2:**

- Führen Sie für die Zeichenkette  $w = \text{SUPERDUPER}$  eine Burrows-Wheeler-Transformation durch und geben Sie die Ergebniszeichenkette  $v$  an sowie den Startindex  $k$  für den Rücktransformationsalgorithmus.
- Geben Sie eine sowohl eine Lauflängen- als auch eine *move-to-front*-Kodierung für  $v$  an.  
Anfangswerte für diese Kodierung seien

$D$	$E$	$P$	$R$	$S$	$U$
0	1	2	3	4	5

- Führen Sie für die Zeichenkette  $v = \text{MIINNAEESL}$  eine inverse Burrows-Wheeler-Transformation (Dekodierung) durch; der Startindex<sup>1</sup> sei  $k = 8$ .

---

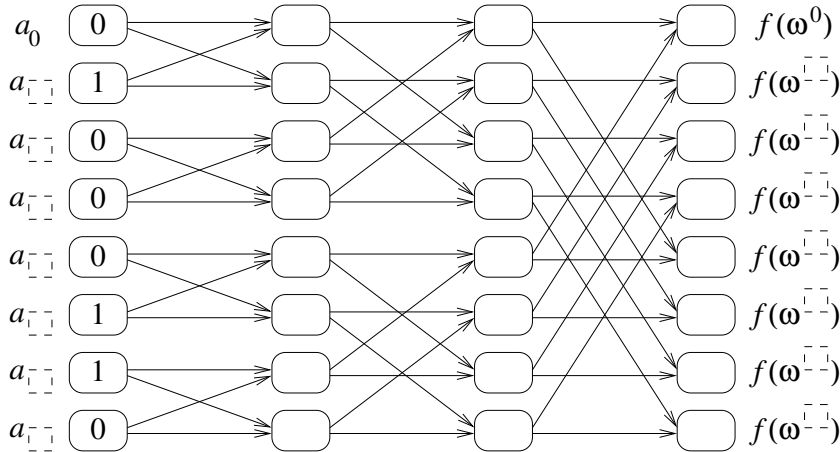
<sup>1</sup>Wir beginnen bei Eins zu zählen, nicht bei Null.

### Aufgabe 43

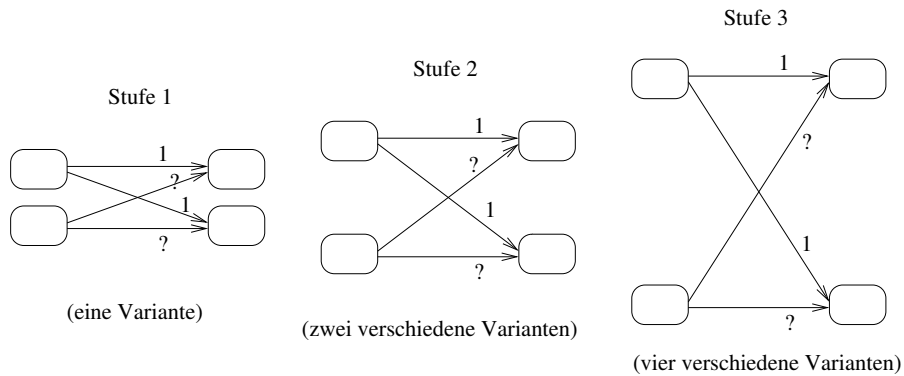
Betrachten Sie für  $n = 2^3$  das 3-stufige Butterfly-Schema der Schnellen Fouriertransformation (FFT) genauer: Gegeben sei das Polynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^7 a_i x^i \quad \text{mit} \quad (a_i)_{i=0,\dots,7} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$$

- a) Füllen Sie die Einträge des dreistufigen Butterfly-Schemas mit den konkreten Zahlenwerten für die Zwischen- und Endergebnisse:



Überlegen Sie sich zunächst den Wert von  $\omega$ , und wie die Gewichte (zur Ermittlung der neuen Einträge aus den alten) in den einzelnen Varianten der einstufigen Basis-Schemata gewählt werden müssen:



Beachten Sie außerdem die Reihenfolge, in der die Koeffizienten  $a_i$  an der Eingabe anliegen müssen. (vgl. Skript)

- b) Führen Sie mit den in Teil (a) erhaltenen Funktionswerten  $f(1), f(\omega), f(\omega^2), \dots, f(\omega^7)$  eine inverse FFT durch, indem Sie das dreistufige Butterfly-Schema für  $\bar{\omega} := \omega^{-1} = \omega^*$  mit diesen Funktionswerten füttern.<sup>2</sup>
- c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie (d.h. als was) das Element  $a_0$  in dem dreistufigen Schema aus (b) zustande kommt.

Tip: Da  $\omega = q + qi$  einen irrationalen Real- und Imaginär-Anteil  $q = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$  hat, schreiben Sie im dreistufigen Schema die Einträge besser als Linearkombinationen von  $1, q, i, qi$ .

<sup>2</sup>Wie müssen die Gewichte für die Basis-Schemata hier gewählt werden?

Sie sollten an der Ausgabe dann wieder die ursprünglichen Koeffizienten  $a_i$  erhalten; bzw. das  $2^3 = 8$ -fache davon, weil ja der Normierungsfaktor  $1/n$  nicht beachtet wurde, vgl. Skript.

#### Aufgabe 44

Studieren Sie das JPEG-Kompressionsverfahren für fotografisches Bildmaterial.

- a) Zeigen Sie, daß die Basisterme der (eindimensionalen) Diskreten Kosinus-Transformation

$$T_u(x) = \cos \frac{(2x+1)u\pi}{16} \quad \text{auf dem Intervall } I = \left[-\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right] \ni x$$

für verschiedene  $u \in \{0, 1, \dots, 7\}$  paarweise orthogonal sind.

- b) Die Fourieranalyse im Komplexen bewältigt Phasenverschiebungen von reellwertigen Signalen  $f(x) = l \sin(\alpha + \omega x)$  dadurch, daß diese in die orthogonalen reellen Komponenten  $b(\omega) = l \sin(\omega x)$  und  $a(\omega) = l \cos(\omega x)$  zerlegt werden:  $C(\omega) = a(\omega) + b(\omega) \cdot i$ . Der Betrag  $|C| = a^2 + b^2$  gibt dann korrekt die Amplitude  $l$  des ursprünglichen Signals, unabhängig von der Phasenverschiebung  $\alpha$ , an (vgl. Vorlesung, Kapitel 5, Seite 27).

Wie reagiert die Kosinustransformation (die die ergänzenden Sinus-Terme nicht zur Verfügung hat!) auf Phasenverschiebungen bspw. des Signals

$$f(x) = (-1)^x \quad \text{für } x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} ?$$

Was ist mit Phasenverschiebungen von

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)$	0	+1	0	-1	0	+1	0	-1

 ?

Konsultieren Sie dazu Kapitel 5.5 des Vorlesungsskripts.

#### **Erbauliches zum Einstein-Jahr 2005, letzte Folge:**

*“Wenn man nicht gegen den Verstand verstößt,  
kann man überhaupt zu nichts kommen.”*