



Übungsblatt Nr. 1

Abgabe bis 20. April

*Pro Blatt wird nur eine – vorbestimmte – Aufgabe korrigiert und gewertet. Bitte schreiben Sie **groß hervorgehoben** die Gruppennummer Ihres Tutoriums auf Ihre zusammengehefteten (!) Lösungsblätter.*

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Modell der RAM (*random access machine*; nicht wie üblich *random access memory*!) etwas genauer. Vergleichen Sie die RAM einerseits mit einer realen Maschinen- bzw. Assemblersprache, andererseits mit dem Modell der Turingmaschine; jeweils

- bezüglich des zu veranschlagenden Aufwands für Rechenoperationen,
- bezüglich der Vergleichsoperation,
- bezüglich der arithmetischen Genauigkeit.
- Was ist jeweils eine Elementaroperation?

Aufgabe 2

wird korrigiert: 1+3+2+4=10 Punkte

Ein Binärbaum mit n Knoten sei implementiert als Menge von n Datensätzen. In jedem Datensatz steht ein Schlüssel, der die eigentliche Information trägt, sowie bis zu zwei Verweise (Zeiger) auf die Kinder des betreffenden Knotens.

- Welche Bedingungen müssen für die Verzeigerung gelten, damit die Datenstruktur – zunächst ein allgemeiner Graph – tatsächlich einen Baum beschreibt?
- Wie viele *leere Zeiger* kann ein solcher Baum mit n Knoten maximal haben?
Wie viele mindestens?
Beweisen Sie Ihre Behauptungen.
- Wie viele Knoten kann ein Binärbaum der Höhe¹ h höchstens enthalten?
Wie viele Knoten mindestens?
Beweisen Sie Ihre Behauptungen.
- Gegeben seien $2n$ Knoten eines ungerichteten allgemeinen Graphen. Wie viele Kanten darf der Graph höchstens enthalten, damit nicht Untergraphen von drei je paarweise zusammenhängenden Knoten entstehen?

¹Die Höhe eines Baumes ist die Länge des längsten Pfades.

Aufgabe 3

Studieren Sie für einen AVL-Baum der Höhe h einen ungünstigsten Fall. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei für jeden Teilbaum die Balance = -1 , jeder Teilbaum sei also maximal linkslastig.

- a) Wie ist das numerische Verhältnis n_L/n_R der Knoten beider Teilbäume der Wurzel in Abhängigkeit von h ?
- b) Gegen welchen Wert konvergiert dieses Verhältnis für $h \rightarrow \infty$?
- c) Was folgern Sie daraus für die Effizienz z. B. der Suchoperation in einem solchen AVL-Baum im Vergleich zum günstigsten Fall?

Aufgabe 4

Ein Wüstling hat während Ihrer Abwesenheit Ihre umfangreiche Plattensammlung verwüstet. Die Schallplatten sind noch intakt, befinden sich aber (teilweise) in den falschen Hüllen. Skizzieren Sie einen Algorithmus, der möglichst schnell die Ordnung wiederherstellt.

Sie können dabei davon ausgehen,

- daß jede Platte in einer Hülle steckt; und daß jede Hülle eine Platte enthält.
- daß aus jeder Schallplatte und jeder Plattenhülle eindeutig ein Sortierschlüssel hervorgeht: sagen wir, der Interpret.²
- daß Ihr guter Freund die Plattenhüllen in der sortierten Reihenfolge belassen hat.
- daß genau die folgenden Elementaroperationen jeweils einen Zeitschritt dauern:
 - eine Platte aus einer Hülle herausnehmen,
 - eine Platte in eine Hülle hineinstecken,
 - zwei Gegenstände auf ihre Schlüssel vergleichen (“<” oder “=”).

Ein Element in eine (sortierte oder unsortierte) Folge an bekannter Stelle einzuordnen oder herauszunehmen, erfordere nur einen Zeitschritt: schließlich arbeiten wir mit manueller Gewalt und müssen nicht iterativ Lücken schließen usw.

Die Anzahl der Platten bzw. Hüllen sei n , die Anzahl der Platten, die in falschen Hüllen stecken, sei k .

Analysieren Sie nun, wie viele Zeitschritte Ihr Algorithmus benötigt, um die Ordnung wieder herzustellen

- a) ohne Hinzunahme des O-Kalküls;
- b) unter Berücksichtigung der Vereinfachungen des O-Kalküls.

Erbauliches zum Einstein-Jahr 2005, Folge 1:

“Holzhacken ist deshalb so beliebt, weil man bei dieser Tätigkeit den Erfolg sofort sieht.”

²Wir setzen hier der Einfachheit halber voraus, daß es keine zwei gleichen Schlüssel gibt, und daß sie im mathematischen Sinne eine totale Ordnung “<” bilden; ferner gibt es trivialerweise eine Gleichheitsrelation “=” auf Schlüsseln, um zu testen, ob Platte und Hülle zusammenpassen.