

Überlegungen zur Problemreduktion

Die Situation

Die Idee hinter den nun folgenden Überlegungen zur Problemreduktion ist es, Aussagen über **die Komplexität unerforschter Probleme** zu machen. Dies geschieht mithilfe solcher Probleme,

- deren Komplexität bekannt ist, und
- die mit den neuen Problemen in Beziehung gesetzt werden.

Mit “Komplexität” eines Problems ist hier der zeitliche (oder aber auch: speichermäßige) Aufwand gemeint, der im schlimmsten anzunehmenden Fall der Eingabe mit einem optimalen deterministischen Algorithmus notwendig bleibt. Es ist dies

die Laufzeit $T_{\max}(n)$ bzw. der Speicheraufwand $S_{\max}(n)$

für einen solchen *worst case* unter allen Eingaben der Länge mit Komplexität n . Sie wird meist mittels des O-Kalküls, der Landauersymbole, klassifiziert und dargestellt.

Konkrete Algorithmen, also Verfahren, die Probleme lösen mit einem bestimmten Aufwand, interessieren uns hier nicht. Wir halten nur fest, daß die Aussage, daß ein *Problem* die Komplexität $O(f)$ bzw. $\Omega(g)$ hat, bedeutet, daß kein optimaler *Algorithmus* mit einem Aufwand von $o(f)$ oder $\omega(g)$ existiert.

Wir notieren hier das neue, zu bearbeitende, zu erforschende Problem mit

A

Ein Problem

B ,

das mit A in Beziehung zu setzen sein wird, sei bereits bekannt.

Achtung: “Reduktion” ist hier nicht quantitativ zu verstehen. Es geht nicht darum, daß irgendetwas wirklich weniger wird. Das einzige, das wortwörtlich “reduziert” wird, ist der zu verausgabende Grips, der dadurch gespart wird, daß sich nicht direkt (!) mit dem neuen Problem A auseinandergesetzt werden muß: Bequem, wie Informatiker sind, kommt uns A schon bekannt vor und wird daher “auf B reduziert” – oder aber umgekehrt.

Welche Schranken interessieren?

Die erste Unklarheit besteht bereits in der Unschärfe der Sprache. Ist von einer **unteren Schranke** $\Omega(f)$ die Rede, so ist zu fragen, ob damit

- “irgendeine” untere Schranke, also z. B. $\Omega(1)$, gemeint ist – eine sehr schwache Aussage –, oder aber
- “die” untere Schranke, was wohl heißen soll: die größtmögliche untere Schranke.

Analoges gilt für **obere Schranken** $O(f)$:

- “Irgendeine” obere Schranke ist nicht allzu interessant; man nehme eine exorbitant wachsende Funktion wie $O(n^{n^n})$.
- Sinnvoller ist die Abschätzung, wenn “die” obere Schranke, also die kleinstmögliche, betrachtet wird.

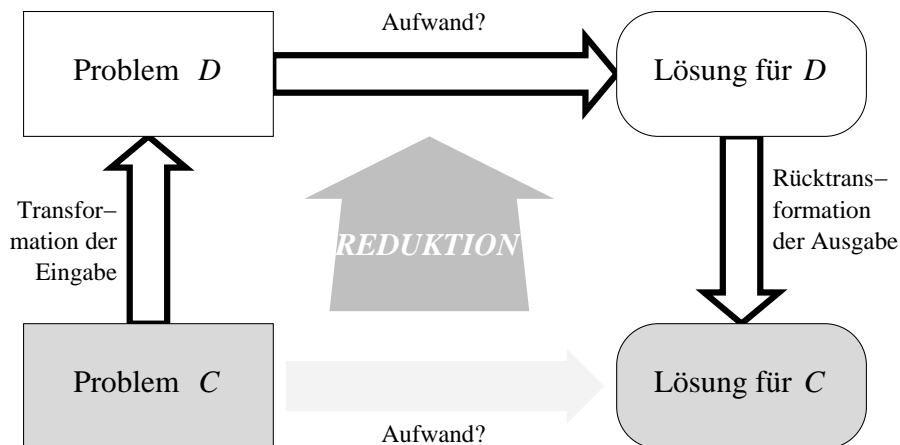
Oft ist mit der Komplexitätsklasse $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$ zugleich eine obere und untere Schranke für das bekannte Problem B gegeben.

Die Reduktion

Prinzipiell gibt es zwei Arten, vorzugehen: A kann auf B reduziert werden oder B wird auf A reduziert. (Wenn beides möglich ist, korrespondieren die beiden Probleme in einer ganz besonderen Weise und diesbezüglich Teil einer Äquivalenzklasse.)

C auf D **zu reduzieren** heißt,¹ für jede mögliche Eingabe (jeden Parametersatz!) des Problems C dies Problem lösen zu können, *indem* das Problem D mit einer korrespondierenden Eingabe gefüttert wird und eine Ausgabe zustande bringt, deren Rücktransformierte eine korrekte Ausgabe von C ist.

Man hat also den Fall, der im folgenden Diagramm² geschildert ist.



Der Kern der Argumentation in den hier zusammengetragenen Überlegungen besteht nun darin, daß das Problem D , wenn es einen Eingabe-Parametersatz von C bekommt, nicht das *allgemeine* “Problem D ” sein muß. Vielmehr kann es sein, daß

¹die neuen Bezeichner sollen nur der Wiederherstellung der Allgemeinheit dienen, es ist dabei egal, welches der beiden C, D dabei das alte und welches das neue Problem ist

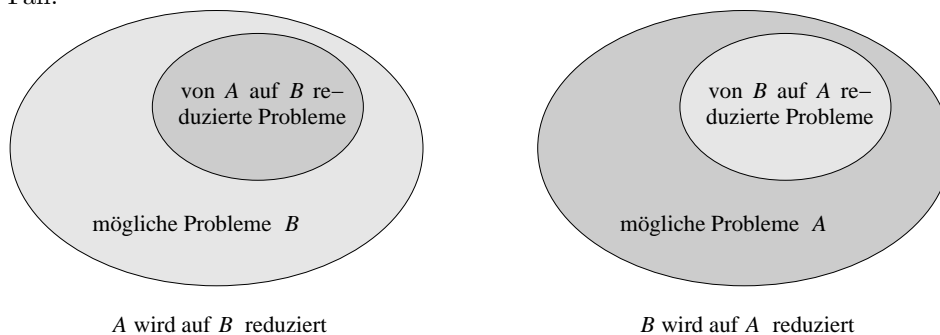
²Man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß Mathematiker noch diesem Diagramm eine eigentümliche Dynamik abgewinnen, wenn sie sagen “es kommutiert” und sie es anschauen wie das Kaninchen die Schlange.

das auf D reduzierte C ein besonders günstiger *Spezialfall* von D ist, für den die *allgemeinen* Komplexitätsbetrachtungen über D so nicht gelten!

Hieraus erklärt sich, daß

- im Falle der Reduktion von A auf das bekannte Problem B nur die Aussage über dessen obere Schranke $O(f)$ sich auf A induziert, während
- im Falle der Reduktion von B auf das neue Problem A dementsprechend nur das Wissen um die untere Schranke $\Omega(g)$ von B in eine Abschätzung über die Komplexität von A einfließt.

Das Mutmaßen über eine untere Schranke für A im ersteren Falle ist eine ebenso unsichere Angelegenheit wie Aussagen über obere Schranken von A im letzteren Fall.



Annahmen

Der quasi infrastrukturelle Aufwand, der getrieben werden muß, um die Reduktion real durchzuführen – die ja tatsächlich in einer Transformation der Eingabe von C und einer Rücktransformation der Ausgabe von D besteht³ –, darf natürlich nicht vergessen werden. Wir gehen aber davon aus, daß dieser transformatorische Aufwand einigermäßen trivial und somit gegenüber der Komplexität von D zu vernachlässigen ist.

Im Zweifelsfall muß jedoch explizit klargelegt sein, daß der Transformationsaufwand hinreichend klein ist, den Problemlösungsaufwand also nicht übersteigt.⁴

Anwendung

Meist ist ja für prominente Probleme ihre asymptotische Komplexität so genau bekannt, daß mit $\Theta(f)$ die Funktionenklasse für das Aufwandsmaß eindeutig bestimmt ist. Damit ist evidenterweise zugleich die größte untere und die kleinste obere Schranke gegeben.

Das immer wieder als Lieblingsbeispiel bemühte Sortieren von n skalaren Werten hat bspw. eine Komplexität von $\Theta(n \cdot \log n)$, nicht mehr und nicht weniger.

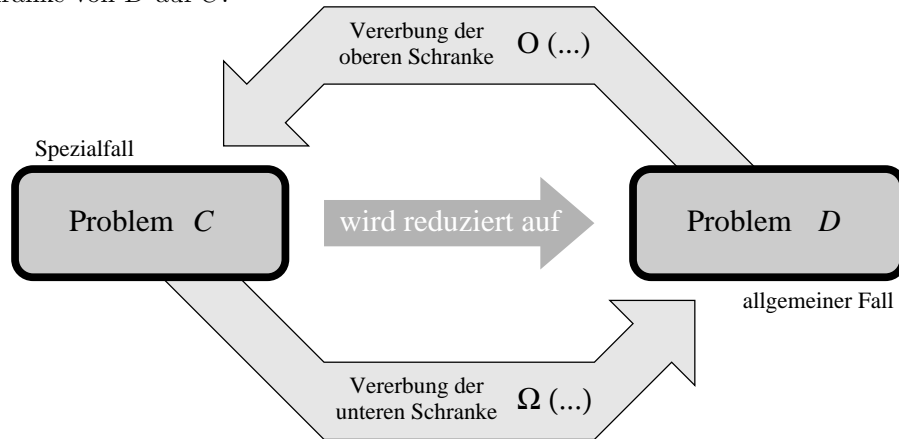
Da aber $g \in \Theta(f)$ nichts anderes bedeutet als sowohl $g \in O(f)$ als auch $g \in \Omega(f)$, wird aus dem Vorliegen von oberer *und* unterer Schranke beim bereits bekannten Problem B nur noch als sichere Aussage das Wissen um entweder eine obere *oder* eine untere Schranke, $O(f)$ bzw. $\Omega(f)$, für das neue Problem A gefolgert werden können.

³meist sind dies bloß Änderungen der Notation

⁴Sollte dies doch der Fall sein, so lassen sich daraus eben andere Aussagen über die Komplexität des neuen Problem A treffen; der Infrastrukturaufwand muß in die Komplexitätsabschätzung von A eingehen.

Fazit

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß sich, wenn C auf D reduziert wird, sich die untere Aufwandsschranke von C auf D überträgt und die obere Aufwandsschranke von D auf C .⁵



- Wenn also eine untere Schranke für ein neues Problem A zu finden ist, muß ein bekanntes Problem B auf A reduziert werden.
- Ist man hingegen an einer oberen Schranke für das neue Problem A interessiert, so muß A auf ein bereits bekanntes Problem B reduziert werden.

Kann sowohl A auf B als auch B auf A reduziert werden, so haben beide Probleme dieselbe Komplexitätsklasse.

⁵Diese interessante Antisymmetrie hängt mit der Definition des Aufwands als *maximalem*, $T_{\max}(n)$ bzw. $S_{\max}(n)$, zusammen. Hätten wir "Aufwand" als solchen im *best case* definiert, als $T_{\min}(n)$ bzw. $S_{\min}(n)$, so würde sich bei Reduktion von C auf D – umgekehrt – die obere Schranke von C auf D übertragen und die untere von D auf C .