

Der O-Kalkül

Motivation

In der Informatik möchte man oft das qualitative Wachstumsverhalten einer Funktion beschreiben. Insbesondere zu Zwecken der Aufwandsbetrachtung von Algorithmen ist man an derartigen Abschätzungen interessiert.

Dabei kommt es i. d. R. weder auf additiv noch auf multiplikativ angeheftete Konstante an, sie gelten als unwesentlich und sollen vernachlässigt werden.

Es interessiert stattdessen das asymptotische Verhalten einer Funktion bzgl. eines gegen "unendlich" strebenden Arguments. Der O-Kalkül modelliert genau dieses qualitative Verhalten. Er wurde erstmalig Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt, die Notation trägt den Namen ihres Entwicklers:

Die fünf Landauschen Symbole

Insbesondere als Informatiker, die zumeist mit diskreten Größen zu tun haben, betrachten wir der Einfachheit halber Funktionen der Art

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Alle Definitionen und Betrachtungen lassen sich aber

- auf reellwertige und -argumentige Funktionen und überdies
- auf mehrargumentige Funktionen

verallgemeinern. Lediglich ist sicherzustellen – damit bei den folgenden Definitionen über obere und untere Schranken nicht ärgerliche Fallunterscheidungen getroffen werden müssen –, daß der Wertebereich nichtnegativ ist.

Obere Schranken

Oft möchte man ausdrücken, daß eine gegebene Funktion durch eine andere, meist einfacher aufzuschreibende, nach oben beschränkt ist.

Groß O. Das gebräuchlichste Symbol der O-Notation, nämlich das, welches ihr auch den Namen gibt, ist

$$O(f) = \{ g \mid \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : g(n) \leq C \cdot f(n) \}$$

Hier sind f und g Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Der O-Kalkül beschreibt ja Funktionenklassen, also nach qualitativen Wachstumskriterien zusammengefaßte Funktionen. Die häufig zu beobachtende Schreibweise

$$g(n) = O(f(n))$$

ist im doppelten Sinne falsch: erstens sind $g(n)$ und $f(n)$ Zahlenwerte, die sich höchstens durch die totale Ordnung " \leq " beschreiben, nicht aber in irgendeinem Sinne asymptotisch betrachten lassen; zweitens ist, selbst wenn man also " $g = O(f)$ " schreibt, dies falsch, denn g ist Teil der

Funktionenklasse $O(f)$ und nicht mit dieser identisch. (Auch die Schreibweise “ $g(n) \in O(f(n))$ ” ist natürlich falsch, denn es bleibt ebenso unklar, was die Funktionenklasse $O(x)$ beschreiben soll, wenn $x = f(n)$ eine Zahl ist, wie, daß eine Zahl $y = g(n)$ Teil einer Funktionenklasse sein kann.) Daher muß es korrekt heißen:

$$g \in O(f)$$

oder

$$(n \mapsto g(n)) \in O(n \mapsto f(n))$$

Nur, weil aus dem Kontext heraus meist klar ist, welches das Funktionsargument n ist, ist in der Praxis meist die eigentlich falsche Kurznotation ohne “ $n \mapsto$ ” gebräuchlich.

Das große O faßt also alle Funktionen zusammen, die asymptotisch – d. h. abgesehen von konstanten Faktoren und Summanden – *höchstens so schnell* wachsen wie eine Referenzfunktion.

Klein o . Analog hierzu ist die Funktionenklasse $o(f)$ definiert, die alle Funktionen zusammenfaßt, die asymptotisch *langsamer* wachsen als die Referenzfunktion f :

$$o(f) = \{ g \mid \forall C > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : g(n) < C \cdot f(n) \}$$

Man beachte den Allquantor für die Konstante C ; dies ist eine schärfere Bedingung als bei der Definition von $O(f)$. (Stände dort nur der Existenzquantor, so wäre ja beispielsweise mit $C = 2$ für jede Funktion $f \in o(f)$; was widersinnigerweise hieße, das f langsamer wachsen würde als f .)

Es ist im Falle $g \in o(f)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

Untere Schranken

Analog und symmetrisch zu den oberen Schranken lassen sich zwei Symbole für untere Schranken angeben:

Groß Ω . Die Funktionenklasse $\Omega(f)$ – groß Omega – faßt alle Funktionen zusammen, die asymptotisch *mindestens so schnell* wachsen wie die Referenzfunktion f :

$$\Omega(f) = \{ g \mid \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : g(n) \geq C \cdot f(n) \}$$

Klein ω . Analog ist die Funktionenklasse $\omega(f)$ – klein Omega – definiert, die alle Funktionen zusammenfaßt, die asymptotisch *schneller* wachsen als die Referenzfunktion f :

$$\omega(f) = \{ g \mid \forall C > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : g(n) > C \cdot f(n) \}$$

Auch hier beachte man den Allquantor für die Konstante C ; dies ist eine schärfere Bedingung als bei der Definition von $\Omega(f)$.

Es ist im Falle $g \in \omega(f)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Enges Maß

Theta. Von besonderem Interesse sind Funktionen g , für die sowohl $g \in O(f)$ als auch $g \in \Omega(f)$ gilt. Diese wachsen offenbar – abgesehen von additiven wie multiplikativen Konstanten – *genauso schnell* wie die Referenzfunktion f . Für sie ist ein eigenes Landauersymbol, groß Theta, definiert:

$$\begin{aligned} \Theta(f) &= \{ g \mid \exists C_1, C_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : C_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq C_2 \cdot f(n) \} \\ &= O(f) \cap \Omega(f) \end{aligned}$$

Für zwei solche Funktionen gilt meist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \text{const.} > 0$$

Leicht läßt sich nachrechnen, daß “ $g \in \Theta(f)$ ” eine Äquivalenzrelation zwischen g und f begründet:

$$g \in \Theta(f) \Leftrightarrow \Theta(g) = \Theta(f) \Leftrightarrow g \sim f,$$

denn sie ist reflexiv ($f \in \Theta(f)$), symmetrisch ($g \in \Theta(f) \Rightarrow f \in \Theta(g)$) und transitiv ($g \in \Theta(h) \wedge h \in \Theta(f) \Rightarrow g \in \Theta(f)$).

Tauglichkeit in der Praxis

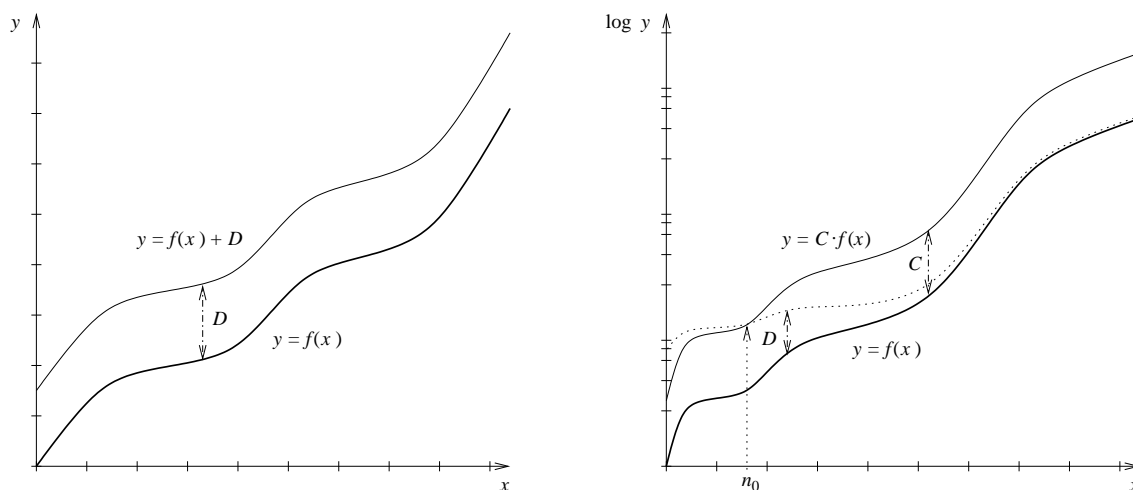
Unendlich und Null. Manchmal wird $\infty(f)$ anstelle von “ $O(f)$ ” geschrieben, um anzudeuten, daß die Konstante C einen absurd hohen Wert annehmen muß. Analog liest man gelegentlich im Falle, daß C einen verschwindend kleinen Wert annehmen muß, statt “ $\Omega(f)$ ” auch $o(f)$.

Eigenschaften

Die Kombination

- der *asymptotischen* Form “ $\exists n_0 : \forall n > n_0$ ” der Wachstumsbedingung mit
- der Verrechnung einer *multiplikativen* Konstanten C

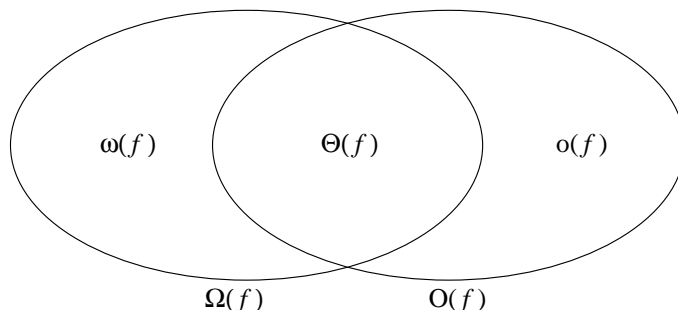
bewirkt bei allen fünf Landauerschen Funktionenklassen, daß *auch additive* Konstante D leicht überflügelt werden können. Wenn das Funktionsargument n gegen “unendlich” strebt, erschlägt $C \cdot f(n)$ mit passender Konstante C sehr bald jeden Wert $f(n) + D$:



Diese Eigenschaft der O-Notation macht ihre Benutzung so komfortabel und einfach.

Wie auch das nachfolgende Diagramm veranschaulicht, gilt

$$\omega(f) \subset \Omega(f) \supset \Theta(f) \subset O(f) \supset o(f)$$



Zum O-Kalkül wird die O-Notation durch arithmetische Eigenschaften, die von Funktionen f auf Funktionenklassen $\Theta(f)$ induziert werden. Wir haben es mit *Abschätzungen* zu tun. So ist beispielsweise

$$O(f) + O(g) \subseteq O(f + g) \qquad \Omega(f) + \Omega(g) \subseteq \Omega(f + g)$$

$$o(f) + o(g) \subseteq o(f + g) \qquad \omega(f) + \omega(g) \subseteq \omega(f + g)$$

$$\Theta(f) + \Theta(g) \subseteq \Theta(f + g)$$

Gleiches gilt für die Multiplikation $f \cdot g$. Und sogar für Wurzeln, Logarithmen, Potenz- und Exponentialfunktionen, da diese Funktionen $x \mapsto \sqrt[x]{x}$, $x \mapsto \log_a x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto a^x$ monoton über alle Maßen wachsen.

Bezüglich Subtraktion, Division o. ä. läßt sich das Verhältnis der Funktionenklassen untereinander nicht so einfach beschreiben, da die Funktionen $x \mapsto a - x$ und $x \mapsto a/x$ nicht monoton wachsend sind.

All diese Eigenschaften zusammengenommen, kann leicht eine Vielzahl von Sätzen der Form

$$O(f) \cdot \Theta(g) \subseteq O(f \cdot g), \quad \omega(f) + \Omega(g) \subseteq \omega(f + g) \quad \text{usw. usw.}$$

aufgestellt werden.

Variationen des O-Kalküls

Oft wird für nichtnegativ-reellwertige Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ das asymptotische Verhalten statt für $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ auch für

$$f(x), g(x) \rightarrow 0$$

betrachtet. Der Gebrauch der Landauschen Symbole überträgt sich in diesem Fall aus den obigen Definitionen auf die reziproken Werte $f(x)^{-1}, g(x)^{-1}$, um Aussagen über die Geschwindigkeit der Konvergenz gegen Null (z. B. für unliebsame Restterme) formulieren zu können.

Da $x \mapsto x^{-1}$ monoton fallend ist, vertauschen sich O und Ω bzw. o und ω allerdings.