Informatik IV
im Sommersemester 2005

IBDS Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Gebäude 50.34, Am Fasanengarten 5

Die fabelhafte Welt der komplexen Zahlen

Motivation

Die Grundidee für die "Erfindung" der komplexen Zahlen $\mathcal{C}$ war, quadratische Gleichungen, denen keine reellen Zahlen genügen, symbolisch lösen zu können. Der Basisfall für eine solche Gleichung ist $x^2 + 1 = 0$, als Lösung wurde die **imaginäre Einheit** i vorgeschlagen, manchmal auch als j bezeichnet (die Ähnlichkeit zu iterativen Laufvariablen ist rein zufällig!):

$$i \quad := \quad \sqrt{-1}$$

Mit dieser Einrichtung, die gleichsam eine Zahl ohne reellen Wert sein soll, wird aber der Raum, in dem die Lösungen für quadratische Gleichungen zu suchen sind, ein zweidimensionaler:

- Herkömmliche Gleichungen z. B. der Gestalt $x^2 = a$ haben für positives a weiterhin ihre Lösungen $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ auf der eindimensionalen **reellen Achse** $\mathbb{R} = \Re := \{x \mid x^2 \in \mathbb{R} \geq 0\}$. Für Gleichungen der Gestalt $x^2 = -a$ mit positivem a wird man auf dieser Achse jedoch nicht fündig;
- die Lösungen solcher Gleichungen $x^2 = -a$ müssen also woanders zu finden sein, nämlich in $\{x \mid x^2 \in \mathbb{R} \leq 0\} = i\mathbb{R} =: \Im$. Es ist dies die **imaginäre Achse**, die ebenfalls eindimensional ist.

Da $i^2 = -1$ gilt, sind die Zahlen auf beiden Achsen zusammen ($\Re \cup \Im$) bzgl. Multiplikation abgeschlossen: für reelle Zahlen a, b gilt

$$a \cdot b = ab \qquad a \cdot bi = (ab)i \qquad ai \cdot b = (ab)i \qquad ai \cdot bi = -ab$$

$\cdot$	$\Re$	$\Im$
$\Re$	$\Re$	$\Im$
$\Im$	$\Im$	$\Re$

Zur Gaußschen **komplexen Zahlenebene**, also zweidimensional, wird der Lösungsraum allgemeiner quadratischer Gleichungen durch Abgeschlossenheit bezüglich der Addition. Beispielsweise sind Lösungen von $x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$ nämlich weder auf $\Re$ noch auf $\Im$ zu finden. Vielmehr löst der gemischte Ausdruck "$i - \frac{1}{2}$", der weder reell noch imaginär ist, die Gleichung, wenn mit der imaginären Einheit wie mit einer irreduziblen Größe gemäß der bekannten Rechenregeln gerechnet wird. Insbesondere das Distributivgesetz erweist sich als sehr hilfreich, um solche gemischten Terme in die Standardform $a + bi$ zu überführen ($a, b \in \mathbb{R}$). Die reellen Werte a und b sind dann die *eindeutig bestimmten* Koordinaten der komplexen Zahl

$$c \quad = \quad a + bi$$

auf der komplexen Zahlenebene

$$\mathcal{C} \quad = \quad \Re \times \Im$$

Hierbei werden $\Re$ und $\Im$ als orthogonal betrachtet.

Grundrechenarten

Das Rechnen mit komplexen Zahlen läuft – wie schon erwähnt – analog dem mit reellen Zahlen. Lediglich die irreduzible Größe i muß als Faktor vor so manchem Term mitgeschleift werden, bis sie sich durch ein weiteres i zu $i \cdot i = -1$ neutralisiert. Ansonsten werden die bekannten Rechenregeln rein symbolisch angewandt.

Das Schöne an der komplexen Zahlenebene ist, daß mittels dieser herkömmlichen Rechenregeln bemerkenswerte geometrische Eigenschaften der Darstellung komplexer Zahlen in der Ebene veranschaulicht werden:

- Die **Addition** zweier Zahlen c_1, c_2 hat seine Entsprechung natürlich in der vektoriellen Addition der Ortsvektoren von c_1 und c_2:

  $$c_1 + c_2 \quad = \quad a_1 + b_1 i \quad + \quad a_2 + b_2 i \quad = \quad (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

  Insbesondere ist sie daher kommutativ und assoziativ.

- Die **Subtraktion** geschieht analog; es ergibt sich der Differenzvektor der Ortsvektoren.

- Sehr sehr trickreich muß die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen c_1, c_2 genannt werden:

  $$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 \quad &= \quad (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \quad = \quad a_1 a_2 \quad + \quad a_1 b_2 i + b_1 a_2 i \quad + \quad b_1 b_2 i^2 \\ &= \quad (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned}$$

  Soweit ist das noch nicht verblüffend. Graphisch, in der Zahlenebene, vollzieht die Multiplikation jedoch eine *Drehung*, ebenso, wie die Addition eine *Verschiebung* bedeutet. Genauergesagt ergibt sich eine Kombination aus einer Drehung um den Ursprung $0 = 0 + 0i$ und einer Streckung (wie bei der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}$). Dabei ist $a_2 \in \Re$ genau für die Streckung von c_1 zuständig, und $b_2 i \in \Im$ für die Drehung von c_1.

- Hieraus ergibt sich auch die **Division** c_1/c_2: damit sie die zur Multiplikation inverse Operation ist, muß sie mit einer Multiplikation mit dem inversen Element von $c_2 \neq 0$ identisch sein.

Mit den geometrischen Eigenschaften von Multiplikation und Division wären wir auch schon beim nächsten Kapitel: der Zahlendarstellung.

Notationen

Die **kartesische Standardform** für komplexe Zahlen c als Summe haben wir schon kennengelernt:

$$c \quad = \quad a + b \cdot i \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

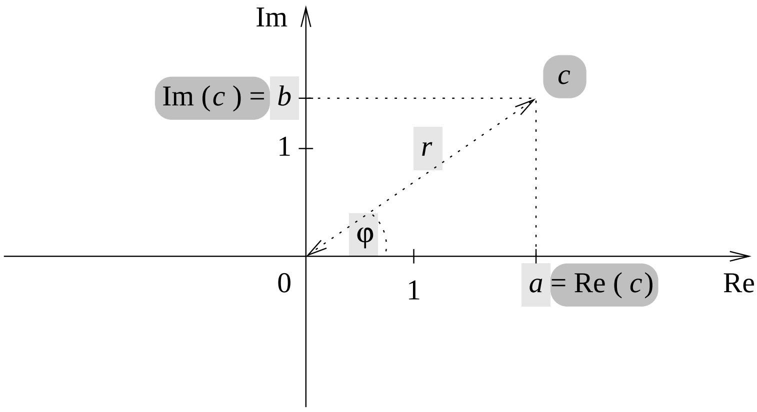
Hierbei heißt $\Re(c) = \mathrm{Re}(c) = a$ der **Realteil** und $\Im(c) = \mathrm{Im}(c) = b$ der **Imaginärteil** von c. Weitere Standardformen der Darstellung sind die Paarschreibweise

$$c \quad = \quad (\ a\ ,\ b\ )\ ,$$

und die geometrisch sehr anschauliche **Polarform**

$$c \quad = \quad r \cdot (\ \cos\varphi + i \sin\varphi\ )$$

mit dem **Betrag** $r = \sqrt{a^2 + b^2} =: |c|$ und dem **Argument**/Winkel $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ der komplexen Zahl c:



Mit der Polarform verwandt ist die später noch zu behandelnde **Eulersche Form** als Produkt

$$c = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

(Oft werden statt $c = (a, b)$ auch die Buchstaben $z = (x, y)$ verwendet, um der Standardbezeichnung der Koordinatenachsen Rechnung zu tragen.)

Allerdings kommt man, ob $c = (a, b)$ oder $c = (r, \varphi)$, um die Zweidimensionalität nicht herum.

Insbesondere anhand der Polarformen komplexer Zahlen läßt sich die rotative Eigenschaft der Multiplikation darstellen:[1]

$$c_1 \cdot c_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2))$$

$$= (r_1 \cdot r_2)\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i\big)$$

Die Argumente (Winkel) addieren sich also, während sich die Beträge wie bei reellen Zahlen multiplizieren.

Weitere Arithmetik

- Die **neutralen Elemente** der komplexen Zahlen $\mathcal{C}$ sind – wie auch bei den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ –
  - die Null $0 = (0, 0)$ bzgl. der Addition und
  - die Eins $1 = (1, 0)$ bzgl. der Multiplikation.

  Die imaginäre Einheit $i = (0, 1)$ ist *kein* neutrales Element. Sie ist – multiplikativ verstanden – vielmehr eine Standardgröße für Rotationen um 90°, nur in bezug auf den Betrag einer komplexen Zahl verhält sich die Multiplikation mit $b \cdot i$ neutral.

- Ähnlich wie in $\mathbb{R}$ das (bzgl. Addition) inverse Element zu einer Zahl definiert ist, ist auch in $\mathcal{C}$ das **inverse Element** zu einer Zahl $c = (a, b)$ die Größe

$$-c = (-a, -b)$$

- Wird nur der Imaginärteil negiert, so spricht man von **Konjugation**:

$$c^* = \bar{c} := (a, -b)$$

  ist die zu $c = (a, b)$ konjugiert komplexe Zahl.

[1] Veranschaulichung der trigonometrischen Additionstheoreme!

- Das zu $c = (a, b)$ **inverse Element** bzgl. Multiplikation – und damit die Division $c_1/c_2 = c_1 c_2^{-1}$ – läßt sich anhand konjugiert komplexer Zahlen einfach ausdrücken:

$$c^{-1} = \frac{1}{c} \quad = \quad \frac{c^*}{|c|^2}$$

Dies ist logisch, denn der Winkel muß, wie bei c^*, negiert sein, und der Betrag reziprok (es ist $r^2 = |c|^2 = c \cdot c^*$, wie auch graphisch nachzuvollziehen ist).

Ähnliche Überlegungen hinsichtlich der Polarkoordinatendarstellung kann man sich zum Potenzieren, Wurzelziehen und Logarithmieren machen:[2]

- Wenn sich beim Multiplizieren die Winkel (Argumente) φ addieren, so müssen sie sich beim **Potenzieren** multiplizieren. In der Tat ist dies bei der Eulerschen Darstellung der Fall ($z \in \mathbb{R}$):

$$c^z \quad = \quad (r \cdot e^{\varphi i})^z \quad = \quad r^z \cdot e^{(z\varphi)i}$$

Es lassen sich sogar komplexe Exponenten definieren:

$$\begin{aligned} c^d \quad &= \quad (r \cdot e^{\varphi i})^{a+bi} \quad = \quad r^{a+bi} e^{\varphi i(a+bi)} \\ = \quad r^a e^{-b\varphi} \cdot r^{bi} e^{a\varphi i} \quad &= \quad \underbrace{e^{a \ln r - b\varphi}}_{\in \Re} \cdot \underbrace{e^{(a\varphi + b \ln r)i}}_{|\cdots|=1} \\ &= \quad e^{(a \ln r - b\varphi) \, + \, (a\varphi + b \ln r)i} \end{aligned}$$

- Das Ziehen der n-ten **Wurzel** ist in Polarform sehr anschaulich. Abgesehen vom Betrag, der für sich n-radiziert wird, wird das Argument (der Winkel) durch n geteilt:

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r \cdot e^{\varphi i}} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n} i}$$

Es gibt aber[3] genau n verschiedene solcher Wurzeln. Für den Spezialfall der Radizierung von $c = 1$ (mit $r = 1$, $\varphi = 2\pi$) ist von **Einheitswurzeln** die Rede; die n-ten Einheitswurzeln sind für $k = 1, ..., n$

$$e^{2\pi \frac{k}{n} i}$$

Sie liegen auf dem Einheitskreis um den Ursprung, beginnend bei $e^0 = e^{2\pi \frac{0}{n} i} = e^{2\pi \frac{n}{n} i} = e^{2\pi i} = 1$, und bilden ein regelmäßiges n-Eck.

- Der Vollständigkeit halber sei noch das **Logarithmieren** vorgeführt:

$$\log c \quad = \quad \log(r \cdot e^{\varphi i}) \quad = \quad \log r \; + \; \varphi \cdot i$$

Algebra

Es ist vielleicht verblüffend, daß für kubische Gleichungen oder solche höheren Grades nicht weitere imaginäre Einheiten für höherdimensionale Räume definiert werden müssen, um Lösungen zu finden. Die zweidimensionale komplexe Zahlenebene ist abgeschlossen und reicht immer aus.

Beispielsweise läßt sich $x^3 + 1 = 0$ (mittels Polynomdivision durch die reelle Lösung $x = -1$) in die Form $(x + 1) \cdot \big(x^2 - x + 1\big) = 0$ faktorisieren:

$$\begin{aligned} (x+1) \cdot \big(x - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, i)\big) \cdot \big(x - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, i)\big) \quad &= \quad 0 \\ \big(x - (\cos 180^o + i \sin 180^o)\big) \cdot \big(x - (\cos 60^o + i \sin 60^o)\big) \cdot \big(x - (\cos 300^o + i \sin 300^o)\big) \quad &= \\ (x - e^{180^o i}) \cdot (x - e^{60^o i}) \cdot (x - e^{300^o i}) \quad &= \end{aligned}$$

Im Komplexen haben Polynome n-ten Grades immer n Nullstellen.

[2] Ob dies alles auf die genialische Definitionswillkür eines Gauß oder Euler zurückgeht, oder das gar nicht anders sein kann (als Abbildung *natürlicher* Strukturen), das vermag ich nicht zu sagen.

[3] restklassenbedingt, denn es ist für alle $k = 1, ..., n$: $(k \cdot n) \bmod n = k(n \bmod n) = 0$