

Dick und dünn vs. Offen und abgeschlossen

Aufgrund akuter Mißverständnisse sei hier noch einmal die Verschiedenheit der Unterscheidungen von Punktmengen

- einerseits in dicke und dünne Mengen (wie in der Vorlesung Informatik IV) und
- andererseits der in offene und abgeschlossene Mengen (wie in der Analysis bzw. “Höheren Mathematik” behandelt)

erklärt.

Definitionen

Wir bewegen uns meist in einem n -dimensionalen Raum als Grundmenge unserer Betrachtungen.

In diesem Raum ist für $\varepsilon > 0$ eine ε -**Umgebung** bzw. ε -**Kugel** $U_\varepsilon(\mathbf{x})$ um den Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert:

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon\}$$

Hier besteht noch kein Unterschied. Die ε -Umgebung ist tatsächlich eine (n -dimensionale!) Kugel um den Punkt \mathbf{x} .

Aus der Analysis kennen wir die Definitionen:

- Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung** eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$ existiert.
- Eine Menge M heißt **offen**, falls M eine Umgebung jedes (!) Punktes $\mathbf{x} \in M$ ist.
- M heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

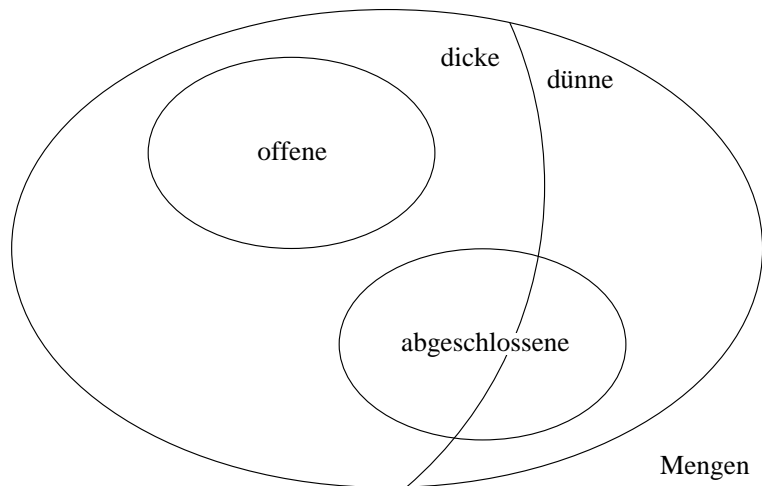
Wir haben in der Vorlesung definiert:

- Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **dünn**, wenn es keine ε -Kugel gibt, die ganz in M enthalten ist.
- M heißt **dick**, wenn M nicht dünn ist.

Folgerungen

Aufgrund dieser Definitionen läßt sich festhalten:

- 1) Es gibt nicht nur offene und abgeschlossene Mengen, sondern auch solche, die weder offen noch abgeschlossen sind.
Ein einfaches Beispiel dafür ist im \mathbb{R}^1 das "halboffene" Intervall $[0, 1)$.
- 2) *Offene* Mengen sind immer dick.¹ *Offene* Mengen sind nie dünn.
- 3) *Dünne* Mengen sind nie offen.²



- 4) Weitere allgemeingültige Aussagen über Zusammenhänge von dick/dünn und offen/abgeschlossen können nicht gemacht werden:
 - Dicke Mengen müssen nicht offen sein.
Beispiel: im \mathbb{R}^3 die Einheitskugel $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$; sie ist dick und abgeschlossen.
 - Abgeschlossene Mengen können dick sein.
Beispiel: die abgeschlossene Einheitskugel (s. o.)
 - Abgeschlossene Mengen können dünn sein.
Beispiel: im \mathbb{R}^3 das (ziemlich dünne) Quadrat $[0, 1]^2 \times \{0\}$; jede ε -Kugel wäre hier 3-dimensional.
- 5) **Die Unterscheidung offen/abgeschlossen** bezieht sich lediglich auf den "Rand" (die Begrenzung)³ der Menge. Gehört dieser vollständig zur Menge dazu, so ist sie abgeschlossen. Gehört der Rand vollständig zum Komplement der Menge, so ist die Menge offen.
- 6) **Die Unterscheidung dick/dünn** kann anschaulich über das "Volumen" der Menge bezüglich dem n -dimensionalen Raum⁴ getroffen werden: dünne Mengen haben jedenfalls ein Volumen von Null.⁵

¹da sie Umgebungen von Punkten sind

²da sie keine ε -Kugeln enthalten

³dieser Rand ist in nichtpathologischen Fällen meist $(n - 1)$ -dimensional

⁴So ist z.B. das 2-dimensionale "Volumen" des Einheitsquadrats $=1$, während das 3-dimensionale Volumen desselben Einheitsquadrats $=0$ ist. Analog ist das 2-dimensionale Volumen des Einheitsintervalls (das ja nur eine Strecke ist) $=0$, sein 1-dimensionales Volumen ist $=1$, usw.

⁵Daß dies nur eine grobe Veranschaulichung ist, wird anhand pathologischer Dünnmengen wie den rationalen und den irrationalen Zahlen oder auch Fraktalen (deren Name sich ja aus ihrer gebrochenen – lat.: *fractalen* – Dimension herleitet) klar.