Informatik IV
im Sommersemester 2005

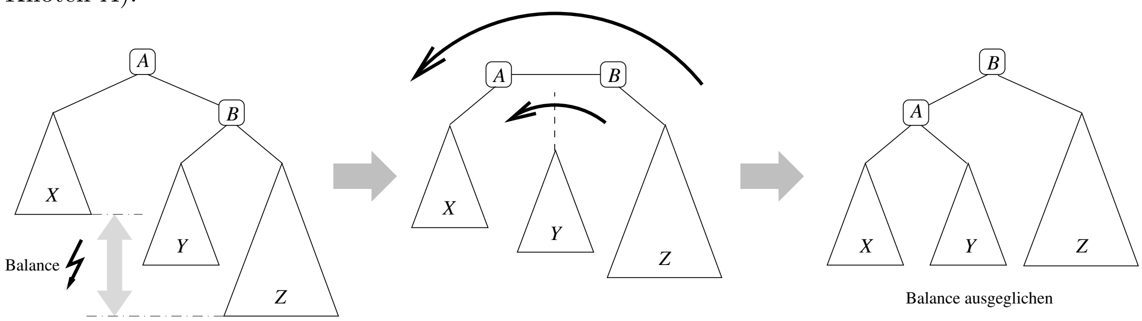
IBDS Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Gebäude 50.34, Am Fasanengarten 5

Rotationen in AVL-Bäumen zur Wiederherstellung der Balance

Bei Operationen wie dem Einfügen oder Löschen eines Knotens können Balancebedingungen des AVL-Baums[1] verletzt werden. Dann werden sog. Rotationen erforderlich, um die Balance in den betreffenden Knoten wieder herzustellen.

Bei den folgenden Betrachtungen wird davon ausgegangen, daß ein Baum, der der AVL-Bedingung bisher genügt hat, durch genau eine Einfüge- oder Löschoperation aus der Balance geraten ist.

Einfachrotation. Wird für einen Knoten die Balance[2] betragsmäßig größer als Eins – durch Löschen in X oder Einfügen in Z –, so entsteht Handlungsbedarf; der Baum ist nicht mehr gemäß der AVL-Bedingung balanciert (Abb. links, hier bzgl. Knoten A).



Durch Umhängen der Teilbäume X, Y und Z an die Knoten A und B entsteht ein balancierter Baum (Abb. rechts). Dabei wird die Bedingung

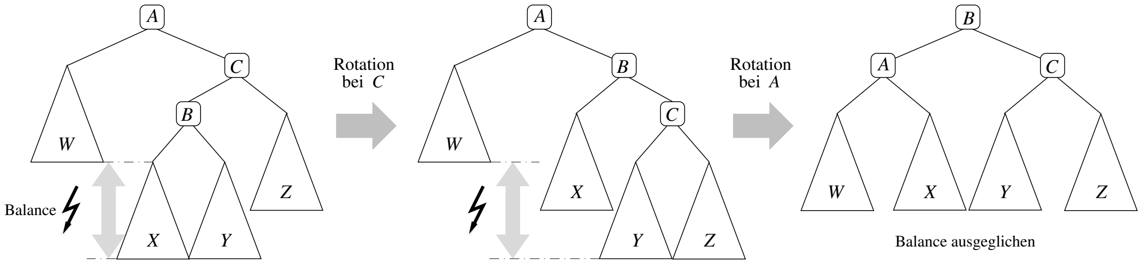
$$X < A < Y < B < Z$$

zu keinem Zeitpunkt verletzt, die Geordnetheit der Baumes ist also eine Invariante. Das Zwischenstadium (Abb. mitte) dient dabei nur der Veranschaulichung dieser "Rotation bei A".

Doppelrotation. Die oben beschriebene Einfachrotation gelingt nur, weil die mißratene Balance zwischen zwei *äußeren* Teilbäumen X und Z zustande kam; das Höhenniveau von Y hat sich nicht verändert. Ist wie in der folgenden Abbildung (links) XBY als *innerer* Teilbaum am Mißlingen der Balance beteiligt, so muß vor der eigentlichen Rotation bei Knoten A eine Rotation bei C stattfinden, um die Balanceverletzung dem äußeren Teilbaum Z zu übertragen und schließlich B zur Wurzel des rebalancierten Baums $WAXBYCZ$ zu machen:

[1] Bekanntlich dürfen für keinen Knoten die Höhen der bei ihm beginnenden Teilbäume um mehr als Eins voneinander differieren.

[2] die Höhendifferenz seiner beiden Unterbäume



Auch hier ist zu beachten, daß die Bedingung

$$W < A < X < B < Y < C < Z$$

zu keinem Zeitpunkt verletzt wurde.

Es ist übrigens unwesentlich, ob X und Y gleich hoch sind. Man macht sich leicht anhand der Abbildung (rechts) klar, daß die Balance nirgends beeinträchtigt wird, wenn X oder Y um eine Stufe niedriger ist, d. h. nur einer der beiden anfangs die Balance bei A verletzt.

Der umgekehrte Fall, daß XBY um zwei Stufen niedriger ist als W, führt übrigens zu keiner Balanceverletzung, da der Unterbaum $XBYCZ$ seine Höhe dann wegen Z erreicht und die Balance bei A somit nicht beeinträchtigt wird.

Aufwand: Den Abbildungen ist zu entnehmen, daß – egal, ob die gestörte Balance durch Löschen[3] oder Einfügen[4] eines Knotens zustande gekommen ist – nach der jeweiligen Korrekturoperation sowohl das niedrigste Niveau erhöht als auch das höchste Niveau erniedrigt worden ist.

Die Höhe des gesamten von der Rotation betroffenen Teilbaums hat sich aber in jedem Fall um Eins verringert, und zwar durch das Erniedrigen des höchsten Niveaus. Das bedeutet:

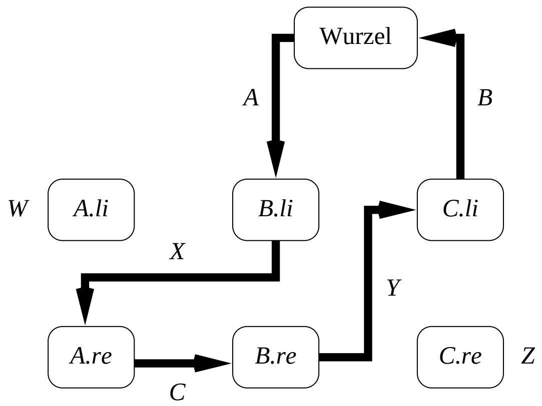
- Im Falle einer debalancierenden **Einfügeoperation** ist die Balance durch ein neues, zu hohes Niveau gestört worden. Nach der Korrektur mittels Rotation ist die alte Gesamthöhe aber wieder hergestellt, d. h. es brauchen keine weiteren Korrekturen zu folgen.

- Im Falle einer debalancierenden **Löschoperation** ist die Balance durch ein neues, zu niedriges Niveau gestört worden. Nach der Korrektur ist die Höhe des gesamten Teilbaums verringert worden, was evtl. neue Balancestörungen nach sich zieht.

Zur Implementierung. Wie immer bei kaskadierten Zuweisungen ist auf Abhängigkeitsverhältnisse zu achten. Die Reihenfolge der Zuweisungen – in diesem Falle: des Umhängens der Zeiger – ist am Datenfluß zu orientieren, damit nicht die Adressierbarkeit von Datenobjekten unwiederbringlich verloren geht.

[3]in Teilbaum X bei der Einfachrotation; in Teilbaum W bei der Doppelrotation
[4]in Teilbaum Z bei der Einfachrotation; in Teilbaum XBY bei der Doppelrotation

Beispiel für ein Datenflußdiagramm (vgl. obige Abbildung zur Doppelrotation):



Da die Datenflußstruktur in diesem Fall zyklisch ist, muß mindestens ein Zeiger zwischengespeichert werden.