

Universität Karlsruhe
Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Samstag, den 18. Oktober 2003

Klausur Informatik IV

Sommersemester 2003

Name: _____
Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Beachten Sie:

- Schreiben Sie Ihren **Namen**, Ihren **Vornamen** und Ihre **Matrikelnummer** gut lesbar (Druckschrift!) sowohl auf dieses Deckblatt als auch auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseiten. Notfalls können Sie weiteres Papier anfordern.
- Zum **Bestehen** der Klausur sind **20** der möglichen **60 Punkte** hinreichend.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Erreichte Punkte							
Mögliche Punkte	10	7	10	10	11	12	60

Note	Bonus	Endnote

Aufgabe 1

Beweisen Sie:

Um den Median von n (unsortiert vorliegenden) reellen Zahlen x_1, \dots, x_n mit einer Random Access Machine (RAM) zu ermitteln, ist ein Aufwand von $T_{\max} \in \Omega(\log n)$ vonnöten.

(Der Median von n Zahlen ist definiert als das mittlere Element der *sortierten* Folge: $x_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$)

Beweis mit Satz A (*lower bound theorem*):

Jede der n Zahlen x_i könnte der Median sein. Dazu definiere $q := n$ paarweise verschiedene Funktionen

$$Q_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q_i : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

Mit den Stützstellen

$$X_1 = (1, 2, \dots, n-1, n)$$

$$X_2 = (2, 3, \dots, n-1, n, 1)$$

\vdots

\vdots

$$\begin{array}{c} \vdots \\ X_{n-1} = (n-1, n, 1, 2, \dots, n-3, n-2) \\ X_n = (n, 1, 2, \dots, n-2, n-1) \end{array}$$

ist nun für die zu berechnende Median-Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad \forall x \in U(X_i, \varepsilon) : \quad f(x) = Q_i(x),$$

wenn beispielsweise $\varepsilon = 1/10$ gewählt wird.

Dann gilt aber für die Anzahl R der notwendigen Vergleichsoperationen

$$R \geq \log_2 q = \log n$$

q.e.d.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, daß der Zylinder mit Radius r und Höhe h , der auf dem Ursprung der x - y -Ebene steht, eine rationale Menge im \mathbb{R}^3 ist, indem Sie ihn in die Standardform für rationale Mengen überführen. Die z -Achse soll dabei nach oben zeigen.

Der Zylinder läßt sich einfach als die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge 0 \leq z \leq h\}$$

darstellen. Mit den rationalen Funktionen (das Quadrieren ist ja ein Multiplizieren)

$$B_1(x, y, z) = r^2 - x^2 - y^2$$

$$B_2(x, y, z) = z$$

$$B_3(x, y, z) = h - z$$

läßt sich M bequem in die Standardform für rationale Mengen bringen:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid B_1(x, y, z) \geq 0 \wedge B_2(x, y, z) \geq 0 \wedge B_3(x, y, z) \geq 0\}$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einer Kreisscheibe mit Radius r sollen n Punkte $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$ möglichst gleichmäßig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- a) Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion BWF , die für gute Konfigurationen minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.

Die Punkte werden “möglichst gleichmäßig verteilt”, wenn sich Punkte nirgendwo zu nahe kommen: Die Funktionswerte von

$$BWF : (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \mapsto - \min_{i \neq j} |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|$$

sind somit zu minimieren.

(3 Punkte)

- b) Wie könnte eine initiale Konfiguration aussehen?

Da der Gradient von BWF Null wird, wenn zwei Punkte identisch sind, würde das Gradientenverfahren in einem solchen Falle nicht mehr funktionieren. Dies ist also unbedingt zu vermeiden; zum Beispiel mit der folgenden, spiralförmigen Anfangskonfiguration:

$$\mathbf{p}_i := \left(\frac{i}{n} r \cdot \cos i, \frac{i}{n} r \cdot \sin i \right)$$

(So wird auch vermieden, daß Punkte kollinear sind; auch dies könnte einer gleichmäßigen Verteilung abträglich werden.) Zufall geht auch.

(3 Punkte)

- c) Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration K eine neue Konfiguration K' ?

Da keine Mutationen notwendig sind – denn i. a. können wegen der Gleichartigkeit der Punkte keine Verklemmungssituationen auftreten –, genügt es, ein Gradientenabstiegs-Verfahren anzuwenden:

$$K' := K - (\nabla BWF)(K)$$

Dann werden die jeweils nächstliegenden Punkte direkt auseinandergeschoben.

(2 Punkte)

- d) Brauchen Sie auch Straffunktionen?

Wenn ja: welche und wozu? Wenn nein: warum nicht?

Ja; denn die Begrenzung auf die Kreisscheibe ist noch nicht modelliert. Die Funktion

$$PEN : (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \mapsto \sum_{i=1}^n c \cdot \min\{r, |\mathbf{p}_i|\}$$

ist c -mal so steil wie BWF und für eine Konstante $c \gg 1$ gut als Straffunktion geeignet. PEN muß noch additiv in die Bewertungsfunktion einfließen.

(2 Punkte)

10 Punkte

Aufgabe 4

Gegeben sei der Fall einer Tastatur, bei der die DELETE-Taste klemmt. Wird sie gedrückt, so werden statt einem Zeichen stets zwei Zeichen auf einmal gelöscht.

Betrachten Sie nun den Editierabstand von Zeichenketten, wenn als einzige Elementaroperationen das Zeichen-Einfügen und das Zeichen-Löschen (mit dieser defekten Taste) erlaubt sind. Kosten pro Taste (d. h. Elementaroperation) sei 1 Einheit.

- a) Geben Sie ein Schema an, nach dem ein Matrixelement (i, j) aus benachbarten Matrixelementen ermittelt werden kann. Es sei Wort v in Wort w zu überführen.

$$A(i, j) := \min \left\{ \begin{array}{ll} A(i, j-1) + 1 & \text{in } w \text{ einfügen} \\ A(i-2, j) + 1 & \text{in } v \text{ löschen} \\ A(i-1, j-1) & \left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } v_i = w_j : \\ \text{gleiches Zeichen} \\ \text{übernehmen} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Korreakterweise muß es statt $i - 2$ natürlich $\max\{i - 2, 0\}$ heißen.

(3 Punkte)

- b) Ist dieser Editierabstand eine Metrik? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Die Funktion $Abst$ ist keine Metrik, denn die Symmetrieeigenschaft ist nicht erfüllt.

Beweis durch Gegenbeispiel, mit den Wörtern $v = \mathbf{XX}$ und $w = \lambda$ (leeres Wort):

$$Abst(v, w) = 1 \quad \text{aber} \quad Abst(w, v) = 2$$

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie den Editierabstand von DEODORANT zu ORNAMENT:

		O	R	N	A	M	E	N	T
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	1	2	3	4	5	6	6	7	8
O	2	1	2	3	4	5	6	7	8
D	2	3	4	5	6	7	7	8	9
O	3	2	3	4	5	6	7	8	9
R	3	4	2	3	4	5	6	7	8
A	4	3	4	5	3	4	5	6	7
N	4	5	3	4	5	6	7	5	6
T	5	4	5	6	4	5	6	7	5

Das Endergebnis lautet also: 5 Editieroperationen.

(4 Punkte)

d) Markieren Sie in der obigen Matrix einen gültigen Pfad, der zum Ergebnis (Minimum) führt.

(Siehe die fettgedruckten Zahlen)

(1 Punkt)

10 Punkte

Aufgabe 5

Betrachten Sie den folgenden Übertragungskanal mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten für Eingabe $X \in \{A, B, C, D\}$ und Ausgabe $Y \in \{E, F, G\}$:

$$p(E|A) = 1 \quad p(F|B) = 1$$

$$p(G|D) = 1 \quad p(F|C) = 1$$

Alle übrigen Übertragungswahrscheinlichkeiten $p(Y|X)$ seien $= 0$.

- a) Nehmen Sie eine Gleichverteilung beim Alphabet der Zeichenquelle an:

$$\forall x \in X : p(x) = 1/4.$$

Ist der Kanal störungsfrei? Ist der Kanal deterministisch?

Der Kanal ist nicht störungsfrei. Aber er ist deterministisch.

Wie groß sind Äquivokation $H(X|Y)$ und Fehlinformation $H(Y|X)$?

Die Fehlinformation ist offensichtlich $H(Y|X) = 0$, denn der Kanal ist deterministisch.

Äquivokation tritt nur für die Eingabezeichen B und C auf, denn für $y \neq F$ ist $H(X|y) = 0$:

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \mathcal{E}_y[H(X|y)] = p(F) \cdot H(p(B|F), p(C|F)) \\ &= p(F) \cdot \sum_{x=B}^C -p(x|B \vee C) \log p(x|B \vee C) \\ &= (p(B)+p(C)) \cdot \sum_{x=B}^C -\frac{p(x)}{p(B) + p(C)} \log \frac{p(x)}{p(B) + p(C)} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

b) Geben Sie jeweils eine nichttriviale Quellenstatistik $p(x)$ an, die

(i) die Transinformation minimiert:

x	A	B	C	D
$p(x)$	0	1/2	1/2	0

$$\begin{aligned}
 H(X; Y) &= \underbrace{H(Y)}_{\text{minimieren!}} - \underbrace{H(Y|X)}_{\text{ist } =0} \\
 &= H(0, 1, 0) - 0 = 0
 \end{aligned}$$

oder: $H(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit} - 1 \text{ bit} = 0$

(ii) die Transinformation maximiert:

x	A	B	C	D
$p(x)$	1/3	1/3	0	1/3

$$\begin{aligned}
 H(X; Y) &= \underbrace{H(Y)}_{\text{maximieren!}} - \underbrace{H(Y|X)}_{\text{ist } =0} \\
 &= H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - 0 = \log 3 = \log_2 3 \text{ bit}
 \end{aligned}$$

oder: $H(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + 0\right) H(1, 0) = \log 3 - 0 = \log_2 3 \text{ bit}$

Nichttrivial heißt hier, daß $H(X) > 0$ sein muß.

(3 Punkte)

c) Kann der Kanal verlustfrei betrieben werden?

Wenn ja: wie? Wenn nein: warum nicht?

Ja; es muß nur gewährleistet sein, daß $p(B) \cdot p(C) = 0$ ist, damit der Term $H(X|Y)$, die Äquivokation, = 0 wird. Dies kann bspw. mit der obigen Verteilung $p(A) = p(B) = p(D) = 1/3$ erreicht werden.

(2 Punkte)

d) Wie groß ist die Kanalkapazität?

Da die Fehlinformation $H(Y|X)$ ohnehin = 0 ist, wird die Transinformation maximal, wenn $H(Y)$ maximal (also = $\log 3$) wird. Die obige Verteilung (b)(ii) erreicht dies, und so ist

$$C = H(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) = \log 3$$

(2 Punkte)

11 Punkte

Aufgabe 6

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

(Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit einer nichtnegativen Punktezahl gewertet.)

<i>Aussage</i>	wahr	falsch
Der O-Kalkül verhält sich neutral gegenüber Funktionen, die sich nur durch additive Konstante unterscheiden.	wahr	
Die (bis auf den Q-Faktor konstante) Quantisierungstabelle beim JPEG-Verfahren läßt sich aus Kosinus-Termen berechnen.		falsch
Rationale Mengen sind stets abgeschlossen im Sinne der Mathematiker.		falsch
Die Äquivokation $H(X Y)$ ist ein Maß für die während der Übertragung aufgetretene Fehlinformation.		falsch
Bei gleicher Wahl der Stützstellen lassen sich zwei Polynome vom Grad n bzw. m in Stützstellendarstellung in $T_{\max} \in O(n + m)$ multiplizieren.	wahr	
Bei verlustfreien Kanälen lassen sich auch für Ausgabealphabetete Y mit $ Y > 2$ optimale Codes konstruieren.	wahr	
Suchmaschinen, die mit einem Thesaurus arbeiten, sind i. d. R. deutlich schneller als solche mit einem normalen Wörterbuch.		falsch
Die Zahl der im Mittel erforderlichen Vergleichsoperationen (Schlüssel-Vergleiche) für die Suche nach einem Element ist bei einem breiten B-Baum erheblich geringer als bei einem AVL-Baum mit demselben Inhalt.		falsch
Sei A ein neues Problem und B ein bekanntes Problem der Komplexität $O(f)$ und $\Omega(g)$.		
Wenn sich A auf B (mit vernachlässigbarem Aufwand) reduzieren läßt, so hat auch A die Komplexität $O(f)$.	wahr	
Wenn sich A auf B (mit vernachlässigbarem Aufwand) reduzieren läßt, so hat auch A die Komplexität $\Omega(g)$.		falsch
Wenn sich B auf A (mit vernachlässigbarem Aufwand) reduzieren läßt, so hat auch A die Komplexität $O(f)$.		falsch
Wenn sich B auf A (mit vernachlässigbarem Aufwand) reduzieren läßt, so hat auch A die Komplexität $\Omega(g)$.	wahr	

12 Punkte