

Übungsblatt 5

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 10/11

Ausgabe 16. Dezember 2010

Abgabe 20. Januar 2011, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt sind 32 Punkte erreichbar. Davon werden nur 16 Punkte auf die Bestehensgrenze für den Klausurbonus angerechnet, d.h. die Bestehensgrenze liegt bei 50% der in allen Blättern erreichbaren Punkte minus 8.

Aufgabe 1

(2+5 Punkte)

Gegeben sei eine Grundmenge $S = \{1, \dots, n\}$ und ein Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq 2^S$. Jede Menge $A \in \mathcal{C}$ enthalte maximal 3 Elemente, d.h. $|A| \leq 3$.

Ein Hitting Set für \mathcal{C} ist eine Teilmenge $X \subseteq S$, so dass für jedes $A \in \mathcal{C}$ gilt $A \cap X \neq \emptyset$. Gesucht ist ein Hitting Set minimaler Kardinalität.

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 1: 3-Hitting-Set-Approximation

Eingabe : $S = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{C} \subseteq 2^S$ mit $|A| \leq 3$ für alle $A \in \mathcal{C}$

Ausgabe : Hitting Set X für \mathcal{C}

$X \leftarrow \emptyset$;

solange $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **tue**

$A \leftarrow$ wähle eine Menge $A \in \mathcal{C}$;
 $X \leftarrow X \cup A$;
 $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \setminus \{A \in \mathcal{C} \mid A \cap X \neq \emptyset\}$;

(a) Geben Sie die Menge X an, die Algorithmus 1 bei Eingabe der folgenden Instanz berechnet:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \mathcal{C} = \{c_1 = \{1, 2, 4\}, c_2 = \{1, 3\}, c_3 = \{2, 3\}, c_4 = \{3, 5\}\} .$$

In Zeile 1 werde jeweils die Menge c_i mit dem kleinsten Index i unter allen Mengen in \mathcal{C} gewählt.

(b) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 ein 3-Approximationsalgorithmus ist, d.h. dass

$$\mathcal{A}(I) \leq 3 \cdot \text{OPT}(I)$$

gilt. Hierbei sei I eine beliebige Instanz des Problems, $\mathcal{A}(I)$ die Kardinalität des von Algorithmus 1 zurückgegebenen Hitting Sets sowie $\text{OPT}(I)$ die Kardinalität einer optimalen Lösung.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Zeige, dass es keinen polynomiellen Approximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie für MAX2SAT gibt, falls $P \neq NP$.

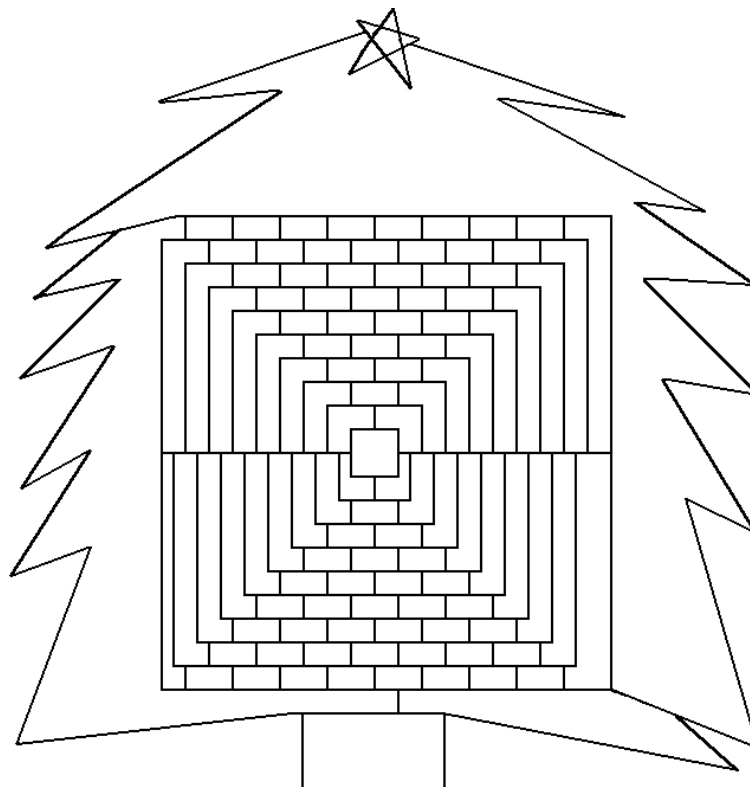
Aufgabe 3

(4 Punkte)

Ein *planarer Graph* ist ein Graph, der so in der Ebene gezeichnet werden kann, dass sich keine zwei Kanten kreuzen. Die *Facetten* eines planaren Graphen bezüglich einer gegebenen Einbettung sind die ‘maximalen, durch Kanten abgeschlossenen Flächen’. Insbesondere wird das ‘den Graphen umgebende Gebiet’ als *äußere Facette* bezeichnet. Zwei Facetten sind *adjazent*, falls sie durch eine gemeinsame Kante begrenzt werden.

Die nachfolgende Zeichnung ist als planarer Graph zu betrachten, wobei die Knoten implizit als Schnitt- bzw. Berührungspunkte der Kanten gegeben seien.

Färbe die Facetten des Graphen mit vier Farben so, dass keine zwei adjazenten Facetten dieselbe Farbe haben.



Aufgabe 4

(4 Punkte)

Zu Weihnachten bekommt das Christkind Lust auf seine bekannt köstliche Schokolade. Leider hat es davon nur noch ein paar Krümel übrig, aber es hat ja seine seltsame Schokoladenmaschine, und mit ein bißchen Glück liefert diese ihm jede Menge Schokolade:

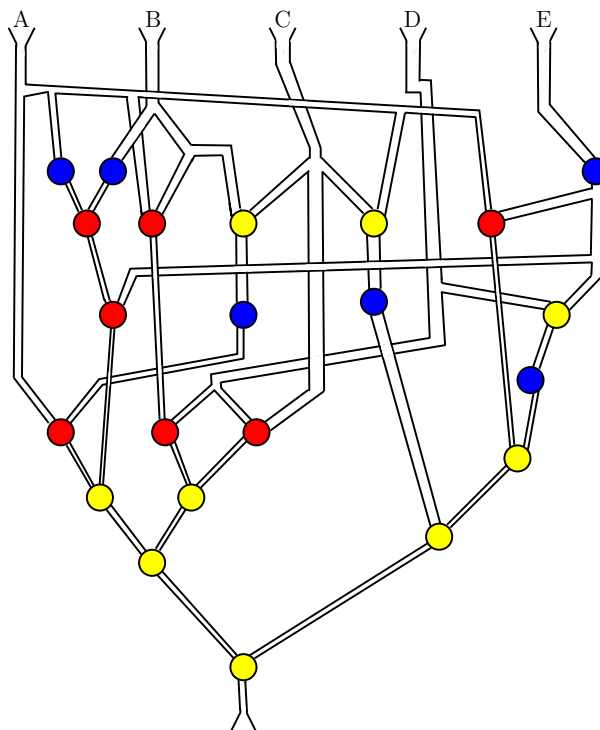
In die Trichter *A* bis *E* muss man entweder Schlangengift oder Schokolade schütten, aber nur zu oft liefert die Maschine leider bloß Schlangengift. Nur bei einer bestimmten Verteilung von Schlangengift und Schokolade in die Trichter liefert die Maschine die begehrte Schokolade. Dass sie meistens nur Schlangengift ausspuckt, liegt daran, dass in ihr an bestimmten Stellen Kobolde ihr Unwesen treiben. Von diesen gibt es drei Sorten:

Die blauen Kobolde sind von schlichtem Gemüt: Fließt solch einem Kobold von oben Schlangengift zu, so macht er daraus Schokolade und gibt sie nach unten weiter. Entsprechend verwandelt er Schokolade in Schlangengift.

Die roten Kobolde arbeiten schon raffinierter: Jeder rote Kobold fängt in jeder Hand Schlangengift oder Schokolade auf. Aber nur, wenn er gleichzeitig in beiden Händen Schlangengift auffängt, gibt er auch Schlangengift ab, in allen anderen denkbaren Fällen produziert er Schokolade.

Die gelben Kobolde sind da anspruchsvoller: Dann und nur dann, wenn ein gelber Kobold in jeder seiner Hände von oben Schokolade auffängt, gibt er Schokolade ab, sonst nur Schlangengift.

Wo sich welche Kobolde in der Maschine eingemischt haben, kann man der folgenden Zeichnung entnehmen:



Aufgabe: Welcher Trichter ist mit Schlangengift bzw Schokoladenkrümeln zu füttern, damit die Maschine Schokolade liefert. Stelle dazu erst eine aussagenlogische Formel auf und vereinfache diese. Denke an deinen Tutor und schreibe auch genügend Zwischenschritte auf. Hinweis: Ausprobieren bestimmter Belegungen ist nicht erforderlich.

Aufgabe 5

(5 Punkte)

Wir betrachten das BIN PACKING-Problem:

Gegeben k ‚Behälter‘ mit ‚Fassungsvermögen‘ $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{N}$ und n ‚Objekte‘ mit natürlichen ‚Gewichten‘ $w_1, \dots, w_n \leq B$. Minimiere die Anzahl ‚benötigter Behälter‘ um alle Objekte zu verpacken (d. h. finde ein möglichst kleines k und eine Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, sodass für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ gilt: $\sum_{f(i)=j} w_i \leq B$). Der Wert einer Lösung $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ sei k .

Aufgabe: Geben Sie einen relativen Approximationsalgorithmus \mathcal{A} für BIN PACKING mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} \leq 2$ an (und beweisen Sie die Gütegarantie!).

Aufgabe 6

(4+1+2 Punkte)

Ein *Vertex Cover* eines ungerichteten, einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ mindestens einer der beiden Knoten u, v in C enthalten ist.

Gegeben seien zwei Approximationsalgorithmen zur Lösung der Problems.

Algorithmus 2: VERTEX-COVER-APPROX-1(G)

```
 $C \leftarrow \emptyset;$ 
 $E' \leftarrow E[G];$ 
solange  $E' \neq \emptyset$  tue
   $e \leftarrow \{u, v\}$  beliebige Kante aus  $E'$ ;
   $C \leftarrow C \cup \{u, v\};$ 
  entferne alle Kanten inzident zu  $u, v$  aus  $E'$ ;
return  $C;$ 
```

Algorithmus 3: VERTEX-COVER-APPROX-2(G)

```
 $C \leftarrow \emptyset;$ 
 $E' \leftarrow E[G];$ 
solange  $E' \neq \emptyset$  tue
   $v \leftarrow$  Knoten mit maximalem Grad in  $G' = (V \setminus C, E')$ ;
   $C \leftarrow C \cup \{v\};$ 
  entferne alle Kanten inzident zu  $v$  aus  $E'$ ;
return  $C;$ 
```

- Zeigen Sie, dass Algorithmus 2 ein 2-Approximationsalgorithmus ist.
- Zeigen Sie, dass Algorithmus 2 keine bessere Gütegarantie als 2 geben kann.
- Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass Algorithmus 3 kein 2-Approximationsalgorithmus ist.