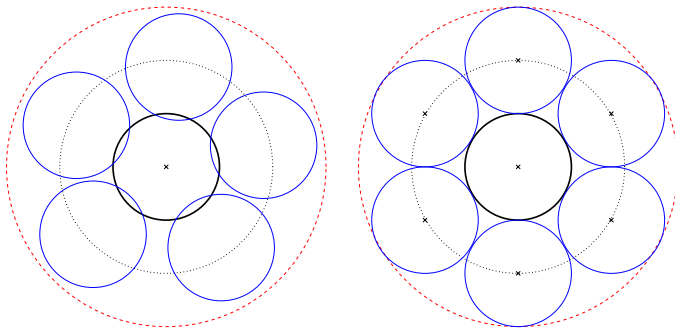




Der Algorithmus  $\mathcal{A}$  berechnet nach Satz 4 eine maximale unabhängige Menge in polynomialer Zeit. Es genügt also zu zeigen, dass er als Approximationsalgorithmus eine (relative) Gütegarantie von 5 hat.

**Lemma 5** *Die Nachbarschaft eines Knotens enthält eine unabhängige Menge der Größe höchstens 5.*

**Beweis:** Betrachte dazu Bild 1.



(a) Nachbarschaft mit einer unabhängigen Menge der Größe 5

(b)

Abbildung 1: Unabhängige Menge in der Nachbarschaft eines Knotens

Bild 1(a) zeigt eine Instanz eines Einheitskreisscheibengraphen, der einen Knoten hat (fetter, schwarzer Kreis in der Mitte), dessen Nachbarschaft eine unabhängige Menge der Größe 5 (blaue Kreise) hat. Bild 1(b) zeigt den Versuch, sechs schnittfreie Kreise zu platzieren. Leider schneiden die blauen Kreise den fetten, schwarzen Kreis nicht mehr, sondern berühren ihn nur. D.h. die blauen Kreise sind nicht in der Nachbarschaft des fetten, schwarzen Kreises enthalten.  $\square$

**Satz 6** *Es gilt  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = 5$ .*

**Beweis:** Wir betrachten den Schnitt von  $IS_{\mathcal{A}}$ , welches von  $\mathcal{A}$  berechnet wurde, und  $IS_{opt}$ , welches eine kardinalitätsmaximale unabhängige Men-

ge ist. Wir müssen nun die Größe von  $IS_{opt} \setminus (IS_{opt} \cap IS_{\mathcal{A}})$  abschätzen. Auf Grund der Maximalität von  $IS_{\mathcal{A}}$  gilt:

$$\forall v \in IS_{opt} \setminus (IS_{opt} \cap IS_{\mathcal{A}}) : \exists w \in IS_{\mathcal{A}} \setminus (IS_{opt} \cap IS_{\mathcal{A}}) : \{v, w\} \in E .$$

Aus Lemma 5 folgt die Ungleichung

$$|IS_{opt} \setminus (IS_{opt} \cap IS_{\mathcal{A}})| \leq 5 \cdot |IS_{\mathcal{A}} \setminus (IS_{opt} \cap IS_{\mathcal{A}})| ,$$

welche  $|IS_{opt}| \leq 5 \cdot |IS_{\mathcal{A}}|$  impliziert.  $\square$

- (b) Sortiere die Knoten so, dass die x- und y-Koordinaten nicht absteigend sind, wobei die x-Koordinate die höhere Priorität habe.

Der Algorithmus  $\mathcal{A}$  mit dieser Knotenreihenfolge genügt.

Es genügt zu zeigen, dass  $\mathcal{A}$  eine bessere relative Gütegarantie als 5 hat.

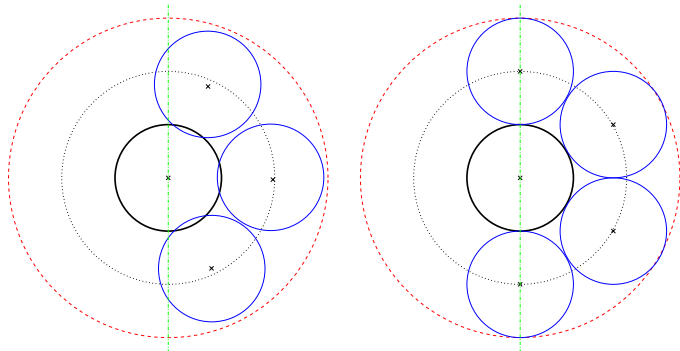
**Satz 7** *Es gilt, dass  $\mathcal{A}$  mit obiger Knotenreihenfolge eine Gütegarantie von  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = 3$  hat. Insgesamt wird  $\mathcal{O}(\max\{|E|, |V| \log |V|\})$  Zeit benötigt.*

**Beweis:** Man argumentiert ähnlich wie im Beweis zu Satz 6, allerdings ist es recht einfach zu sehen, dass Lemma 5 verbessert werden kann: Jeder Knoten hat in seiner noch nicht abgearbeiteten Nachbarschaft eine unabhängige Menge der Größe höchstens 3. Auch der Beweis läuft analog zu dem von Lemma 5, man betrachte dazu die Abbildung 2.  $\square$

- (c) Ja, die Idee von Teilaufgabe (b) kann auch ohne Koordinaten durchgeführt werden. Die Kernaussage ist dabei, dass es stets einen Knoten gibt, dessen noch abzuarbeitende Nachbarschaft eine unabhängige Menge der Größe höchstens drei enthält. Das Verfahren kann wie folgt umgewandelt werden:

**Lemma 8** *Das Verfahren  $\mathcal{A}'$  erfüllt folgende Invarianten:*

- *es vergehen höchstens  $(n - 1)$  Durchlauf der **while**-Schleife, bei der nicht der **else**-Teil der **if**-Abfrage ausgeführt wird.*
- *die **if**-Bedingung kann in  $\mathcal{O}(\Delta^4)$ , wobei  $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$  ist, getestet werden*
- *der **else**-Teil kann in  $\mathcal{O}(|V|)$  abgearbeitet werden*



(a) nicht betrachtete Nachbarschaft mit einer unabhängigen Menge der Größe 3

(b)

Abbildung 2: Unabhängige Menge in der noch nicht bearbeiteten Nachbarschaft eines Knotens

---

**Algorithm 2:** Erweitertes Greedy Verfahren  $\mathcal{A}'$

---

**Input:** ein Graph  $G = (V, E)$

**Output:** eine unabhängige Menge IS von  $G$

**Data:** eine Knotenmarkierung  $N : V \rightarrow \{0, 1\}$ , eine Knotenmarkierung  $C : V \rightarrow \{0, 1\}$

initialisiere IS mit  $\emptyset$

initialisiere  $N$  mit  $N(v) \leftarrow 0$  für  $v \in V$

initialisiere  $C$  mit  $C(v) \leftarrow 0$  für  $v \in V$

**while**  $\exists v \in V : N(v) = C(v) = 0$  **do**

**if**  $N' := \{w \in V \mid \{w, v\} \in E \wedge N(w) = 0\}$  eine unabhängige Menge der Größe 4 enthält **then**

$C(v) \leftarrow 1$

**else**

        IS  $\leftarrow$  IS  $\cup \{v\}$

$N(v) \leftarrow 1$

**for**  $w \in \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$  **do**

$N(w) \leftarrow 1$

**for**  $w \in V$  **do**

$C(w) \leftarrow 0$

---

- nach  $\mathcal{O}(n \cdot \Delta^4)$  verringert sich die Anzahl der Knoten  $v$  mit  $N(v) = 0$  um eins.
- die Bedingung in der **while**-Schleife kann in  $\mathcal{O}(n)$  getestet werden.
- zu jedem Zeitpunkt gilt, dass alle komplett abgearbeiteten Knoten und deren Nachbarschaft eine Eins in  $N$  haben
- zu jedem Zeitpunkt ist  $IS$  eine unabhängige Menge, die maximal ist bzgl. aller Knoten  $w$  mit  $N(w) = 1$
- am Ende des Algorithmus gilt  $N \equiv 1$

**Satz 9** Es gilt  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}'} = 3$  und  $\mathcal{A}'$  hat eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^6)$ .