Universität Karlsruhe (TH) – Fakultät für Informatik
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Lehrstuhl Prof. Dr. P. Deussen

Informatik III – Prof. Dr. P. Deussen im Wintersemester 2001/2002

C. Bierwald, Th. Käufl, F. Schuster http://i10www.ira.uka.de/lehre/info3-winter2001 info3@ira.uka.de

Übungsblatt 15

8.2.2002

Aufgabe 1 Produktbereiche (Käufl)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Bereiche, dann ist $X_1 \times \ldots \times X_n$ Produktbereich, mit der Ordnung $(x_1, \ldots, x_n) \leq (x'_1, \ldots, x'_n)$ genau dann, wenn $x_i \leq x'_i$ für alle i.
Ist Z Kette, dann ist $\sup Z = (sup\ \{z_1 \colon z_1 \in Z_1\}, \ldots, sup\ \{z_n \colon z_n \in Z_n\})$, wobei $Z_i = \{z_i \colon (z_1, \ldots, z_n) \in Z\}$.

Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktionen

$$p_i((x_1, \ldots, x_n)) = x_i,\ 1 \leq i \leq n$$
$$tl((x_1, \ldots, x_n)) = (x_2, \ldots, x_n),\ \text{falls } n \geq 2$$
$$co((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

Hinweis. Bei Funktionen mit mehr als einem Argument genügt es, wenn sie die Stetigkeit in jedem Argument einzeln zeigen.

Aufgabe 2 Produktbereiche (Käufl)

Zeigen Sie die Stetigkeit des Produkts zweier Wortmengen und der Vereinigung zweier Wortmengen. (Siehe Skriptum Satz XV-3.)

Hinweis: Bei Funktionen mit mehr als einem Argument genügt es, wenn Sie die Stetigkeit in jedem Argument einzeln zeigen.

Aufgabe 3 $\mathrm{Ext}(\mathrm{E}\Diamond f)$ ist kleinster Fixpunkt

Sei $K = (S, R, A, L)$ eine Kripke-Struktur und f eine Aussage. Zeigen Sie, daß die Menge

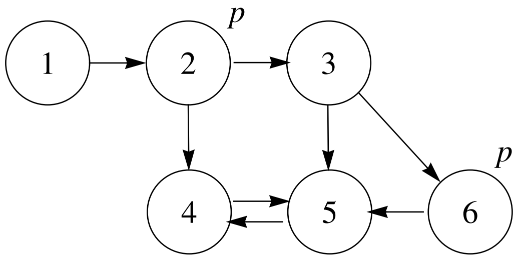
$$M = \mathrm{Ext}(\mathrm{E}\Diamond f) = \{s \in S : s \vDash \mathrm{E}\Diamond f\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} s \in S : \text{Es gibt eine Bahn, die in } s \text{ beginnt, auf} \\ \qquad\quad \text{der mindestens ein Zustand die Eigenschaft } f \text{ hat.} \end{array} \right\}$$

der kleinste Fixpunkt der Funktion $g : 2^S \to 2^S$, $g(Z) = \mathrm{Ext}(f) \cup RZ$, ist. Benutzen Sie den folgenden Hilfssatz und beweisen Sie ihn anschließend:

Hilfssatz. Sei N ein Fixpunkt von g. Ist $s_0, s_1, s_2, \ldots$ eine Zustandsübergangsbahn und s_i ein Zustand dieser Bahn, der die Eigenschaft f hat, dann gilt $R^n\{s_i\} \subseteq N$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mithin $s_0 \in N$.

Aufgabe 4 Dualitäten

Eine Kripke-Struktur $K = (S, R, A, L)$ sei durch folgende Abbildung gegeben.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$L(2) = L(6) = \{p\}$
$L(s) = \emptyset$ für $s \in \{1, 3, 4, 5\}$

a) Für welche Zustände $s \in S$ gilt $s \models \mathrm{A}\Box(\neg p)$?

b) Bestimmen Sie mit dem Fixpunktverfahren aus der Vorlesung die Menge aller Zustände $s \in S$, für die $s \models \mathrm{E}\Diamond p$ gilt.

c) Markieren Sie in der Abbildung die Zustände aus Teilaufgabe a mit einem roten und die Zustände aus Teilaufgabe b mit einem grünen Stift. Was fällt Ihnen auf? Erklären Sie das Ergebnis.