Universität Karlsruhe (TH) – Fakultät für Informatik
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Lehrstuhl Prof. Dr. P. Deussen

Informatik III – Prof. Dr. P. Deussen im Wintersemester 2001/2002

C. Bierwald, Th. Käufl, F. Schuster http://i10www.ira.uka.de/lehre/info3-winter2001 info3@ira.uka.de

Übungsblatt 15 – Lösungsvorschläge

8.2.2002

Aufgabe 1 Produktbereiche (Käufl)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Bereiche, dann ist $X_1 \times \ldots \times X_n$ Produktbereich, mit der Ordnung $(x_1, \ldots, x_n) \le (x'_1, \ldots, x'_n)$ genau dann, wenn $x_i \le x'_i$ für alle i.
Ist Z Kette, dann ist $\sup Z = (sup\ \{z_1 \colon z_1 \in Z_1\}, \ldots, sup\ \{z_n \colon z_n \in Z_n\})$, wobei $Z_i = \{z_i \colon (z_1, \ldots, z_n) \in Z\}$.

Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktionen

$$p_i((x_1, \ldots, x_n)) = x_i,\ 1 \le i \le n$$
$$tl((x_1, \ldots, x_n)) = (x_2, \ldots, x_n), \text{ falls } n \ge 2$$
$$co((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

Hinweis. Bei Funktionen mit mehr als einem Argument genügt es, wenn sie die Stetigkeit in jedem Argument einzeln zeigen.

Stetigkeit von p_1. (Für die übrigen Projektionsfunktionen verläuft der Beweis analog.) Wir betrachten die Gleichungen:

$$p_1(sup\ Z) = p_1((sup\ Z_1, \ldots, sup\ Z_n)) = sup\ Z_1$$
$$= sup\ \{z_1 \colon (z_1, \ldots, z_n) \in Z\}$$
$$= sup\ p_1(Z)$$

Stetigkeit von tl. Wir betrachten (Z wieder Kette):

$$sup\ tl(Z) = sup\ \{tl(z_1, \ldots, z_n) \colon (z_1, \ldots, z_n) \in Z\})$$
$$= sup\ \{(z_2, \ldots, z_n) \colon (z_1, \ldots, z_n) \in Z\})$$
$$= (sup\ Z_2, \ldots, sup\ Z_n\ )$$

Die letzte Zeile erhalten wir durch Anwendung der Definition für die obere Grenze einer gerichteten Menge. ($Z_i = \{z_i \colon (z_1, \ldots, z_n) \in Z\}$ beachten.)

$$(sup\ Z_2, \ldots, sup\ Z_n)$$
$$= tl\ (sup\ Z_1, \ldots, sup\ Z_n)$$
$$= tl\ (sup\ Z)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile wählen wir unter Verwendung der Definition von tl ein passendes Element des Urbilds, erweitern also das (n–1)-Tupel um $sup\ Z_1$ als neues erstes Element. Die drittte Zeile erhalten wir auf Grund der Definition der oberen Grenze.

Stetigkeit von co: Seien Z und Y gerichtet.

$sup\ co(Z, Y) = sup\ \{co(z, y: z \in Z, y \in Y\}$
$= sup\ \{co((z_1, \ldots, z_n), (y_1, \ldots, y_m)): (z_1, \ldots, z_n) \in Z, (y_1, \ldots, y_m) \in Y\}$
$= sup\ \{(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m): (z_1, \ldots, z_n) \in Z, (y_1, \ldots, y_m) \in Y\}$
$= (sup\ Z_1, \ldots, sup\ Z_n, sup\ Y_1, \ldots, sup\ Y_m)$
Definition der oberen Grenze, die Y_i sind wie die Z_i festzulegen
$= co((sup\ Z_1, \ldots, sup\ Z_n), (sup\ Y_1, \ldots, sup\ Y_m))$
$= co(sup\ Z, sup\ Y)$

Aufgabe 2 Produktbereiche (Käufl)
Zeigen Sie die Stetigkeit des Produkts zweier Wortmengen und der Vereinigung zweier Wortmengen. (Siehe Skriptum Satz XV-3.)

Hinweis: Bei Funktionen mit mehr als einem Argument genügt es, wenn Sie die Stetigkeit in jedem Argument einzeln zeigen.

Das Produkt zweier Wortmengen M und N ist $\{mn: m \in M, n \in N\}$. Zum Nachweis der Montonie im ersten Argument setzen wir $X \subseteq Y$ voraus. Wir haben $XM = \{xm: x \in X, m \in M\}$ und da X Teilmenge von Y ist, ist jedes der Worte xm aus XM auch Element von YM. Also $XM \subseteq YM$.

Zum Nachweis der Stetigkeit müssen wir $(\bigcup \boldsymbol{M})N = \bigcup\{XN: X \in \boldsymbol{M}\}$ zeigen, wobei $\boldsymbol{M}$ ein System von Wortmengen ist. Wegen der Monotonie des Produkts und da $X \subseteq \bigcup \boldsymbol{M}$ aus $X \in \boldsymbol{M}$ folgt, ist

$$\bigcup\{XN: X \in \boldsymbol{M}\} \subseteq (\bigcup \boldsymbol{M})N$$

Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir ein Wort $wu \in (\bigcup \boldsymbol{M})N$, wobei $w \in \bigcup \boldsymbol{M}$ und $u \in N$. Dann gibt es ein $X \in \boldsymbol{M}$, sodaß $wu \in XN$. Da $XN \subseteq \bigcup\{XN: X \in \boldsymbol{M}\}$ ist $wu \in \bigcup\{XN: X \in \boldsymbol{M}\}$ und somit $(\bigcup \boldsymbol{M})N \subseteq \bigcup\{XN: X \in \boldsymbol{M}\}$.
Analog weist man die Stetigkeit im zweiten Argument nach.

Die Vereinigung zweier Mengen ist monoton. Ist $X \subseteq Y$, dann ist $X \cup M \subseteq Y \cup M$. Ist $\boldsymbol{M}$ ein System von (Wort-) Mengen, dann ist wegen der Monotonie $\bigcup\{X \cup N: X \in \boldsymbol{M}\} \subseteq (\bigcup \boldsymbol{M}) \cup N$, sodaß wir zum Nachweis der Stetigkeit nur noch die umgekehrte Ungleichung zeigen müssen. Für $x \in (\bigcup \boldsymbol{M}) \cup N$, gibt es zwei Fälle. Ist $x \in N$, dann ist $x \in \bigcup\{X \cup N: X \in \boldsymbol{M}\}$. Ist $x \in (\bigcup \boldsymbol{M})$, dann gibt es ein $X \in \boldsymbol{M}$, sodaß $x \in X$ und das hat $x \in \bigcup\{X \cup N: X \in \boldsymbol{M}\}$ zur Folge. Also $(\bigcup \boldsymbol{M}) \cup N \subseteq \bigcup\{X \cup N: X \in \boldsymbol{M}\}$.

Aufgabe 3 $\mathrm{Ext}(\mathrm{E}\Diamond f)$ ist kleinster Fixpunkt

Sei $K = (S, R, A, L)$ eine Kripke-Struktur und f eine Aussage. Zeigen Sie, daß die Menge

$$M = \mathrm{Ext}(\mathrm{E}\Diamond f) = \{s \in S : s \models \mathrm{E}\Diamond f\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s \in S : \text{Es gibt eine Bahn, die in } s \text{ beginnt, auf} \\ \qquad \text{der mindestens ein Zustand die Eigenschaft } f \text{ hat.} \end{array} \right\}$$

der kleinste Fixpunkt der Funktion $g : 2^S \to 2^S$, $g(Z) = \mathrm{Ext}(f) \cup RZ$, ist. Benutzen Sie den folgenden Hilfssatz und beweisen Sie ihn anschließend:

Hilfssatz. Sei N ein Fixpunkt von g. Ist $s_0, s_1, s_2, \dots$ eine Zustandsübergangsbahn und s_i ein Zustand dieser Bahn, der die Eigenschaft f hat, dann gilt $R^n\{s_i\} \subseteq N$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mithin $s_0 \in N$.

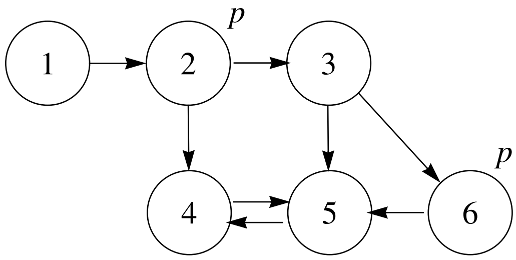
Beweis. Wir wissen bereits (Vorlesung), daß M ein Fixpunkt von g ist. Zeigen müssen wir nur noch die Kleinstheit. Sei dazu N ein weiterer Fixpunkt. Wir haben zu zeigen, daß $M \subseteq N$ gilt. Wir betrachten ein beliebiges $s_0 \in M$ und weisen $s_0 \in N$ nach: Nach Definition von M gibt es eine Bahn, die in s_0 beginnt, auf der mindestens ein Zustand die Eigenschaft f hat. Sei also $s_0, s_1, s_2, \dots$ so eine Bahn und s_i der Zustand mit der Eigenschaft f. Mit dem Hilfssatz folgt sofort $s_0 \in N$.

Beweis des Hilfssatzes. Sei N ein Fixpunkt von g. Wir zeigen $R^n\{s_i\} \subseteq N$ durch Induktion über n.
Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist nur $\{s_i\} \subseteq N$ zu zeigen.
(i) Da N Fixpunkt von g ist, folgt $N = g(N) = \mathrm{Ext}(f) \cup RN$.
(ii) Da s_i die Eigenschaft f hat, gilt $s_i \in \mathrm{Ext}(f)$ und mithin $\{s_i\} \subseteq \mathrm{Ext}(f)$.
Aus (i) und (ii) folgt $\{s_i\} \subseteq \mathrm{Ext}(f) \subseteq \mathrm{Ext}(f) \cup RN = N$.
Induktionsvoraussetzung. Die Behauptung gelte für n.
Induktionsschritt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $R^n\{s_i\} \subseteq N$. Der Vorbereich der linken Seite ist im Vorbereich der rechten Seite enthalten, das heißt $R(R^n\{s_i\}) = R^{n+1}\{s_i\} \subseteq RN$. Da N ein Fixpunkt von g ist, folgt wie schon beim Induktionsanfang $N = \mathrm{Ext}(f) \cup RN$ und damit $RN \subseteq N$ sowie die Behauptung $R^{n+1}\{s_i\} \subseteq N$.

Vom Zustand s_0 aus ist der Zustand s_i in i Schritten erreichbar, was umgekehrt bedeutet, daß $s_0 \in R^i\{s_i\}$ gilt. Mit dem gerade bewiesenen $R^n\{s_i\} \subseteq N$ für alle n folgt sofort die Behauptung $s_0 \in N$.

Aufgabe 4 Dualitäten

Eine Kripke-Struktur $K = (S, R, A, L)$ sei durch folgende Abbildung gegeben.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$L(2) = L(6) = \{p\}$
$L(s) = \emptyset$ für $s \in \{1, 3, 4, 5\}$

a) Für welche Zustände $s \in S$ gilt $s \models \mathrm{A}\Box(\neg p)$?
b) Bestimmen Sie mit dem Fixpunktverfahren aus der Vorlesung die Menge aller Zustände $s \in S$, für die $s \models \mathrm{E}\Diamond p$ gilt.
c) Markieren Sie in der Abbildung die Zustände aus Teilaufgabe a mit einem roten und die Zustände aus Teilaufgabe b mit einem grünen Stift. Was fällt Ihnen auf? Erklären Sie das Ergebnis.
a) Gesucht sind Zustände, die die Eigenschaft haben, daß kein von ihnen aus erreichbarer

Zustand die Eigenschaft p hat. Das ist für die Zustände 4 und 5 der Fall.
b) $\mathrm{Ext}(p) = \{2, 6\}$

$$Z_0 = \emptyset$$

$$Z_1 = g^1(\emptyset) = g(Z_0) = \mathrm{Ext}(p) \cup RZ_0 = \{2, 6\} \cup \emptyset = \{2, 6\}$$

$$Z_2 = g^2(\emptyset) = g(Z_1) = \mathrm{Ext}(p) \cup RZ_1 = \{2, 6\} \cup R\{2, 6\}$$
$$= \{2, 6\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$Z_3 = g^3(\emptyset) = g(Z_2) = \mathrm{Ext}(p) \cup RZ_2 = \{2, 6\} \cup R\{1, 2, 3, 6\}$$
$$= \{2, 6\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 6\} = Z_2$$

Die gesuchte Menge ist $\{1, 2, 3, 6\}$.
c) Die Zustände, die nicht zu Teilaufgabe a gehören sind gerade die Zustände aus Teilaufgabe b und umgekehrt.

Erklärung. Nicht $s \models \mathrm{A}\Box(\neg p)$ heißt, daß nicht auf allen mit s beginnenden Bahnen alle Zustände die Eigenschaft $\neg p$ haben. Es gibt also eine Bahn, die mit s beginnt, auf der nicht alle Zustände die Eigenschaft $\neg p$ haben. Folglich gibt es auf dieser Bahn einen Zustand, der die Eigenschaft $\neg p$ nicht hat. Dann hat dieser Zustand aber die Eigenschaft p und es gilt: Es gibt eine Bahn, die mit s beginnt, auf der es einen Zustand gibt, der die Eigenschaft p hat. Das aber ist nichts anderes als $s \models \mathrm{E}\Diamond p$.

Um also Zustände s zu bestimmen, für die $s \models \mathrm{A}\Box f$ gilt, genügt es, zunächst – mit unserem Fixpunktverfahren – diejenigen Zustände zu finden, für die $s \models \mathrm{E}\Diamond(\neg f)$ gilt. Diejenigen Zustände aus S die nicht dazu gehören, müssen dann die sein, für die $s \models \mathrm{A}\Box f$ gilt.