Informatik III – Prof. Dr. P. Deussen im Wintersemester 2001/2002

C. Bierwald, Th. Käufl, F. Schuster   http://i10www.ira.uka.de/lehre/info3-winter2001   info3@ira.uka.de

Übungsblatt 13

25.1.2002

Aufgabe 1 Rekursionssatz (Bierwald)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

> Zu jeder totalen und berechenbaren Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
> gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Hinweis. Zeigen Sie dazu zunächst mit Hilfe des smn-Theorems, daß es eine totale und berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_{g(i)}(j) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_i(i)}(j) & \text{, falls } \varphi_i(i)\downarrow \\ \perp & \text{, sonst} \end{cases}$$

gibt, betrachten Sie anschließend die Komposition $f \circ g$ und untersuchen Sie $\varphi_{g(i)}(j)$ für ein geschickt gewähltes i.

Aufgabe 2 Seltsame selbstbezügliche While-Programme und Funktionen (Bierwald)

Ein while-Programm, das stets terminiert und als Ausgabe seinen eigenen Index liefert, wollen wir *egozentrisch* nennen, und eine berechenbare Funktion $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die an der Stelle n undefiniert ist und überall sonst den Wert 0 hat, heiße *Rumpelstilzchen*-Funktion. Zeigen Sie, daß es egozentrische while-Programme und Rumpelstilzchen-Funktionen gibt.

Hinweis. Wenden Sie den Rekursionssatz an.

Aufgabe 3 Turingmaschinen (Käufl)

a) Gegeben sei eine Turingmaschine mit den Befehlen
(s, ƀ, ƀ, rechts, q_1), (q_1, |, |, rechts, q_1), (q_1, ƀ, |, links, q_2), (q_2, |, |, links, q_2),
(q_2, ƀ, ƀ, rechts, q_3), (q_3, |, ƀ, rechts, q_4), (q_3, ƀ, ƀ, rechts, q_4), (q_4, |, ƀ, stehen, h) und
(q_4, ƀ, ƀ, stehen, q_4).
Was bewirkt diese Maschine, wenn sie in der Konfiguration ƀsƀ| | ƀ | | | ƀ gestartet wird. Welche Funktion wird berechnet, wenn sie in Konfigurationen der Form ƀsƀ $|^n$ƀ $|^m$ƀ gestartet wird?

b) Zwei (nicht notwendig verschiedene) Turingmaschinen mit den Befehlen B_1, B_2, den Startzuständen s_1, s_2 und den Haltezuständen h_1 und h_2 können zu einer neuen zusammengesetzt werden. Die Befehlsmenge B ist die Vereinigung von B_1 und B_2, wobei in B_1 mindestens ein Vorkommnis von h_1 durch s_2 ersetzt wird.

Betrachten Sie die Turingmaschine r mit den Befehlen (s, ƀ, ƀ, rechts, h), (s, |, |, rechts, h), (h, stop) und die Zusammensetzung R, die Sie durch Zusammensetzung von r mit sich selber erhalten, wobei (s, |, |, rechts, h) durch (s, |, |, rechts, s) ersetzt wird. Was bewirken r und R?

Diagramm für R: $\begin{tikzcd} \mathsf{r} \arrow[loop above, "|"] \arrow[r, "ƀ"] & {} \end{tikzcd}$

c) Definieren Sie Turingmaschinen, die an der betrachteten Position ƀ bzw. | eintragen und eine Turingmaschine, die von der betrachteten Position aus solange nach links läuft, bis sie ƀ vom Band liest.

d) Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Addition von zwei Zahlen ausführt. Verwenden Sie dabei eine geeignete Komposition der in Teilaufgabe b und c definierten Maschinen.

e) Geben Sie eine Turingmaschine (Kopiermaschine) an, die in der Startkonfiguration ein leeres Feld beobachtet und gestartet die Konfiguration ƀsƀ $|^n$ƀ in ƀsƀ $|^n$ƀ $|^n$ƀ überführt. Die Maschine kopiert also die rechts vom beobachteten Feld stehende Strichfolge.

f) Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Strichfolgen $|^n$, $n = 1, 2, \dots$ jeweils getrennt durch ƀ auf ein sonst leeres Band schreibt.

Abgabe der Aufgabe 1 zur Korrektur bei Ihrem Tutor in der Zeit vom 28.1.–1.2.2002.