



Übungsblatt 13

25.1.2002

Aufgabe 1 Rekursionssatz

(Bierwald)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Zu jeder totalen und berechenbaren Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Hinweis. Zeigen Sie dazu zunächst mit Hilfe des smn-Theorems, daß es eine totale und berechenbare Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_{g(i)}(j) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_i(i)}(j) & , \text{ falls } \varphi_i(i) \downarrow \\ \perp & , \text{ sonst} \end{cases}$$

gibt, betrachten Sie anschließend die Komposition $f \circ g$ und untersuchen Sie $\varphi_{g(i)}(j)$ für ein geschickt gewähltes i .

Aufgabe 2 Seltsame selbstbezügliche While-Programme und Funktionen

(Bierwald)

Ein while-Programm, das stets terminiert und als Ausgabe seinen eigenen Index liefert, wollen wir *egozentrisch* nennen, und eine berechenbare Funktion $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die an der Stelle n undefiniert ist und überall sonst den Wert 0 hat, heiße *Rumpelstilzchen*-Funktion. Zeigen Sie, daß es egozentrische while-Programme und Rumpelstilzchen-Funktionen gibt.

Hinweis. Wenden Sie den Rekursionssatz an.

Aufgabe 3 Turingmaschinen

(Käufel)

a) Gegeben sei eine Turingmaschine mit den Befehlen

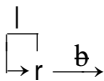
$(s, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \text{rechts}, q_1)$, $(q_1, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}, \text{rechts}, q_1)$, $(q_1, \mathfrak{b}, \mathfrak{l}, \text{links}, q_2)$, $(q_2, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}, \text{links}, q_2)$,
 $(q_2, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \text{rechts}, q_3)$, $(q_3, \mathfrak{l}, \mathfrak{b}, \text{rechts}, q_4)$, $(q_3, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \text{rechts}, q_4)$, $(q_4, \mathfrak{l}, \mathfrak{b}, \text{stehen}, h)$ und
 $(q_4, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \text{stehen}, q_4)$.

Was bewirkt diese Maschine, wenn sie in der Konfiguration $\mathfrak{b}\mathfrak{s}\mathfrak{b}\mathfrak{l}\mathfrak{l}\mathfrak{b}$ gestartet wird. Welche Funktion wird berechnet, wenn sie in Konfigurationen der Form $\mathfrak{b}\mathfrak{s}\mathfrak{b}\mathfrak{l}^m\mathfrak{b}\mathfrak{l}^m\mathfrak{b}$ gestartet wird?

b) Zwei (nicht notwendig verschiedene) Turingmaschinen mit den Befehlen B_1 , B_2 , den Startzuständen s_1 , s_2 und den Haltezuständen h_1 und h_2 können zu einer neuen zusammengesetzt werden. Die Befehlsmenge B ist die Vereinigung von B_1 und B_2 , wobei in B_1 mindestens

ein Vorkommnis von h_1 durch s_2 ersetzt wird.

Betrachten Sie die Turingmaschine r mit den Befehlen $(s, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \text{rechts}, h)$, $(s, l, l, \text{rechts}, h)$, (h, stop) und die Zusammensetzung R , die Sie durch Zusammensetzung von r mit sich selber erhalten, wobei $(s, l, l, \text{rechts}, h)$ durch $(s, l, l, \text{rechts}, s)$ ersetzt wird. Was bewirken r und R ?

Diagramm für R : 

c) Definieren Sie Turingmaschinen, die an der betrachteten Position \mathfrak{b} bzw. l eintragen und eine Turingmaschine, die von der betrachteten Position aus solange nach links läuft, bis sie \mathfrak{b} vom Band liest.

d) Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Addition von zwei Zahlen ausführt. Verwenden Sie dabei eine geeignete Komposition der in Teilaufgabe b und c definierten Maschinen.

e) Geben Sie eine Turingmaschine (Kopiermaschine) an, die in der Startkonfiguration ein leeres Feld beobachtet und gestartet die Konfiguration $\mathfrak{b}s\mathfrak{b}l^n\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}s\mathfrak{b}l^n\mathfrak{b}l^n\mathfrak{b}$ überführt. Die Maschine kopiert also die rechts vom beobachteten Feld stehende Strichfolge.

f) Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Strichfolgen l^n , $n = 1, 2, \dots$ jeweils getrennt durch \mathfrak{b} auf ein sonst leeres Band schreibt.

Abgabe der Aufgabe 1 zur Korrektur bei Ihrem Tutor in der Zeit vom 28.1.–1.2.2002.