Universität Karlsruhe (TH) – Fakultät für Informatik
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Lehrstuhl Prof. Dr. P. Deussen

Informatik III – Prof. Dr. P. Deussen im Wintersemester 2001/2002

C. Bierwald, Th. Käufl, F. Schuster http://i10www.ira.uka.de/lehre/info3-winter2001 info3@ira.uka.de

Übungsblatt 12

18.1.2002

Aufgabe 1 s-m-n-Theorem (Bierwald)

Zeigen Sie, daß es eine totale und berechenbare Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\varphi_{g(i,\,j)}(x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x).$$

Dabei sei diese Summe genau dann für $x \in \mathbb{N}$ definiert, wenn $\varphi_i(x)$ und $\varphi_j(x)$ definiert sind.

Aufgabe 2 Collatz-Funktion, Ulam's Problem (Bierwald)

Die Funktion $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch $c(x) = \begin{cases} x/2 & \text{, falls } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{, sonst} \end{cases}$

Damit definieren wir die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{N}\text{: es gibt } i \in \mathbb{N}\text{, so daß } c^i(x) = 1\}$$

Beispiel. $3 \in M$, wegen $c^0(3) = 3$, $c^1(3) = 10$, $c^2(3) = 5$, $c^3(3) = 16$, …, $c^7(3) = 1$

Zeigen Sie, daß M aufzählbar ist. Ist M auch entscheidbar?

Hinweis. Verzweifeln Sie nicht, wenn Sie bei der Frage nach der Entscheidbarkeit nicht weiterkommen. Sie sind in guter Gesellschaft. Bis jetzt hat noch niemand eine positive, natürliche Zahl > 0 gefunden, die nicht in M liegt. (Und es wurden viele Zahlen untersucht!) Allerdings hat auch noch niemand beweisen können, daß es eine solche Zahl nicht gibt.

Aufgabe 3 Einige primitiv rekursive Funktionen (Käufl)

Wir verwenden das folgende Einsetzungsschema zur Definition von primitiv rekursiven Funktionen:

Ist g eine primitiv rekursive Funktion $Nat^n \to Nat$, und sind $h_1, \ldots, h_n$ primitiv rekursive Funktionen $Nat^m \to Nat$, dann auch $f(\boldsymbol{x}) = g(h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_n(\boldsymbol{x}))$, wobei $\boldsymbol{x} \in Nat^m$.

a) Zeigen Sie: Sind $g(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ und $h(y_1, \ldots, y_m)$ primitiv rekursiv, dann auch $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h(y_1, \ldots, y_m), x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

b) Sei g: $Nat^n \to Nat$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, daß auch f: $Nat^n \to Nat$, wobei $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ primitiv rekursiv ist. (f entsteht durch Vertauschen der Argumente i und j.)

Aufgabe 4 Einige primitiv rekursive Funktionen (Käufl)

a) Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind: *vorg* (Vorgänger), $\dot{-}$, die

Signumfunktion *sg* (vgl. Übungsblatt 10, Aufgabe 4) und $kl(x, y)$ mit $kl(x, y) = 1$ falls $x < y$ und $kl(x, y) = 0$ sonst.

b) Der beschränkte μ-Operator $\mu y\ (0 \leq y \leq u)\ [p(y, z) = 1]$, ist wie der μ-Operator definiert, wobei das kleinste y mit $p(y, z) = 1$ nur im Anfangsstück $0 \ldots u$ der natürlichen Zahlen gesucht wird:

$\mu y\ (0 \leq y \leq u)\ [p(y, z) = 1] = 0$, falls es kein y $(0 \leq y \leq u)$ mit $p(y, z) = 1$ gibt und sonst das kleinste y aus diesem Anfangsstück, für das $p(y, z) = 1$.

Zeigen Sie, daß der beschränkte μ-Operator primitiv rekursiv ist. (Hinweis: Geben Sie ein Loop-Programm für die Ermittlung von y an.)

c) Zeigen sie, daß die Funktionen *div* und *mod* (aus der While-Sprache mit Erweiterungen) primitiv rekursiv sind. (Hinweis: Benutzen Sie den beschränkten μ-Operator. Weiters sei $x\ div\ 0 = 0$ und $x\ mod\ 0 = 0$.)

Aufgabe 5 μ-Rekursion (Bierwald)

Beschreibt die Funktion $f(z) = \mu y[z \dot{-} y = 1]$ die Vorgängerfunktion, wie wir sie aus der while-Sprache kennen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 While-Interpreter (Schuster)

Schreiben Sie unter Zuhilfenahme von SableCC einen Interpreter für die einfache While-Sprache. Verwenden Sie die bereits vorgestellte Grammatik und erzeugen mit SableCC den Parser. Schreiben Sie anschließend einen Interpreter, der auf dem abstrakten Syntaxbaum operiert. Die generierten Klassen des Syntaxbaums verwenden das Entwurfsmuster „Visitor" – was Ihnen die Arbeit erleichtern sollte.

Abgabe der Aufgabe 4b zur Korrektur bei Ihrem Tutor in der Zeit vom 21.–25.2.2002.