Universität Karlsruhe (TH) – Fakultät für Informatik
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme (ILKD)
Lehrstuhl Prof. Dr. P. Deussen

Informatik III – Prof. Dr. P. Deussen im Wintersemester 2000/2001

C. Bierwald, Th. Käufl, F. Schuster http://i10www.ira.uka.de/info3 info3@ira.uka.de

Übungsblatt 7

Aufgabe 4 Chomsky-Normalform (Schuster)

Bestimmen Sie für die folgenden Produktionen die Chomsky-Normalform.

a) Π_a : (EBNF')

S ::= ε	A ::= FA'	F ::= <K>F	K ::= ZK'	Z ::= **a**
S ::= <K> **::=** A . S	A' ::= ε	F ::= 'K'F	K' ::= ε	Z ::= **b**
	A' ::= **|**A	F ::= ε	K' ::= ZK'	Z ::= **c**

(Siehe z.B. Uwe Schöning, Theoretische Informatik, 1.3.1 Normalformen Seite 51 ff.)
Grammatik ε -frei machen:

1. Aus den Nichtterminalen S, A, A', F kann ε abgeleitet werden.
2. Die Expandierten Produktionen:

S ::= ε	A ::= FA'	F ::= <K>F	K ::= ZK'	Z ::= **a**
S ::= <K> **::=** A . S	A ::= A'	F ::= <K>	K ::= Z	Z ::= **b**
S ::= <K> **::=** A .	A ::= F	F ::= 'K'F	K' ::= ε	Z ::= **c**
S ::= <K> **::=** . S	A ::= ε	F ::= 'K'	K' ::= ZK'	
S ::= <K> **::=** .	A' ::= ε	F ::= ε	K' ::= Z	
	A' ::= **|**A			
	A' ::= **|**			

3. Anschließend werden alle ε -Produktionen entfernt und wegen S ::= ε das neue Startzeichen S' mit der Produktion S' ::= S | ε hinzugefügt.

S' ::= S | ε	A ::= FA'	F ::= <K>F	K ::= ZK'	Z ::= **a**
S ::= <K> **::=** A . S	A ::= A'	F ::= <K>	K ::= Z	Z ::= **b**
S ::= <K> **::=** A .	A ::= F	F ::= 'K'F	K' ::= ZK'	Z ::= **c**

<table>
<tr><td>S ::= <K> **::=** . S</td><td>A' ::= **|**A</td><td>F ::= ’K’</td><td>K' ::= Z</td><td></td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** .</td><td>A' ::= **|**</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Chomsky-Normalform bilden:

1. Ketten (B_1 ::= B_2, B_2 ::= B_3, …, B_{k-1} ::= B_k) entfernen, vorkommende Variablen jeweils durch ein neue Variable ersetzen und die rechten Seiten expandieren.
In diesem Fall: A ::= A' mit neuem C :

<table>
<tr><td>S' ::= S | ε</td><td>C ::= FC</td><td>F ::= <K>F</td><td>K ::= ZK'</td><td>Z ::= **a**</td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** C . S</td><td>C ::= **|**C</td><td>F ::= <K></td><td>K ::= Z</td><td>Z ::= **b**</td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** C .</td><td>C ::= **|**</td><td>F ::= ’K’F</td><td>K' ::= ZK'</td><td>Z ::= **c**</td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** . S</td><td>C ::= F</td><td>F ::= ’K’</td><td>K' ::= Z</td><td></td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** .</td><td>C ::= **|**C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>C ::= **|**</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

desweiteren C ::= F mit D

<table>
<tr><td>S' ::= S | ε</td><td>D ::= DD</td><td>D ::= <K>D</td><td>K ::= ZK'</td><td>Z ::= **a**</td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** D . S</td><td>D ::= **|**D</td><td>D ::= <K></td><td>K ::= Z</td><td>Z ::= **b**</td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** D .</td><td>D ::= **|**</td><td>D ::= ’K’D</td><td>K' ::= ZK'</td><td>Z ::= **c**</td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** . S</td><td>D ::= <K>D</td><td>D ::= ’K’</td><td>K' ::= Z</td><td></td></tr>
<tr><td>S ::= <K> **::=** .</td><td>D ::= <K></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= ’K’D</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= ’K’</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= **|**D</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= **|**</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

anschließend K ::= Z mit E :

<table>
<tr><td>S' ::= S | ε</td><td>D ::= DD</td><td>D ::= <E>D</td><td>E ::= EK'</td><td>E ::= **a**</td></tr>
<tr><td>S ::= <E> **::=** D . S</td><td>D ::= **|**D</td><td>D ::= <E></td><td>E ::= **a**</td><td>E ::= **b**</td></tr>
<tr><td>S ::= <E> **::=** D .</td><td>D ::= **|**</td><td>D ::= ’E’D</td><td>E ::= **b**</td><td>E ::= **c**</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>S ::= <E> ::= . S</td><td>D ::= <E>D</td><td>D ::= ’E’</td><td>E ::= c</td></tr>
<tr><td>S ::= <E> ::= .</td><td>D ::= <E></td><td></td><td>K' ::= EK'</td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= ’E’D</td><td></td><td>K' ::= E</td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= ’E’</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= |D</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= |</td><td></td><td></td></tr>
</table>

und letztendlich K' ::= E mit H :

<table>
<tr><td>S' ::= S | ε</td><td>D ::= DD</td><td>D ::= <H>D</td><td>H ::= HH</td><td>H ::= a</td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= D . S</td><td>D ::= |D</td><td>D ::= <H></td><td>H ::= a</td><td>H ::= b</td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= D .</td><td>D ::= |</td><td>D ::= ’H’D</td><td>H ::= b</td><td>H ::= c</td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= . S</td><td>D ::= <H>D</td><td>D ::= ’H’</td><td>H ::= c</td><td></td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= .</td><td>D ::= <H></td><td></td><td>H ::= HH</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= ’H’D</td><td></td><td>H ::= a</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= ’H’</td><td></td><td>H ::= b</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= |D</td><td></td><td>H ::= c</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D ::= |</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Und jetzt das ganze ohne doppelte Produktionen:

<table>
<tr><td>S' ::= S | ε</td><td>D ::= DD</td><td>D ::= <H>D</td><td>H ::= HH</td><td>H ::= a</td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= D . S</td><td>D ::= |D</td><td>D ::= <H></td><td></td><td>H ::= b</td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= D .</td><td>D ::= |</td><td>D ::= ’H’D</td><td></td><td>H ::= c</td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= . S</td><td></td><td>D ::= ’H’</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>S ::= <H> ::= .</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Für alle Terminale $t \in T$ werden die Nichtterminalzeichen M_t mit den Produktionen M_t ::= t ergänzt:

<table>
<tr><td>S' ::= S | ε</td><td>D ::= DD</td><td>D ::= <H>D</td><td>H ::= HH</td><td>H ::= a</td></tr>
</table>

			$M_{\vert} ::= \vert$	$M_a ::= \mathbf{a}$
$S ::= <H> \mathbf{::=} D\ .\ S$	$D ::= \vert D$	$D ::= <H>$	$M_< ::= <$	$H ::= \mathbf{b}$
			$M_> ::= >$	$M_b ::= b$
$S ::= <H> \mathbf{::=} D\ .$	$D ::= \vert$	$D ::= \text{'}H\text{'}D$	$M_{\text{'}} ::= \text{'}$	$H ::= \mathbf{c}$
$S ::= <H> \mathbf{::=}\ .\ S$		$D ::= \text{'}H\text{'}$	$M_{.} ::= .$	$M_c ::= c$
$S ::= <H> \mathbf{::=}\ .$			$M_{:} ::= \mathbf{:}$	
			$M_{=} ::= \mathbf{=}$	

3. Jetzt wird bei allen Produktionen außer bei $M_t ::= t$, das Terminalzeichen t durch M_t ersetzen:

$S' ::= S \mid \varepsilon$	$D ::= DD$	$D ::= M_<HM_>D$	$H ::= HH$	$H ::= \mathbf{a}$
$S ::= M_<HM_>M_{:}M_{:}M_{=}DM_{.}S$	$D ::= M_{\vert}D$	$D ::= M_<HM_>$	$M_{\vert} ::= \vert$	$M_a ::= \mathbf{a}$
$S ::= M_<HM_>M_{:}M_{:}M_{=}DM_{.}$	$D ::= \vert$	$D ::= M_{\text{'}}HM_{\text{'}}D$	$M_< ::= <$	$H ::= \mathbf{b}$
$S ::= M_<HM_>M_{:}M_{:}M_{=}M_{.}S$		$D ::= M_{\text{'}}HM_{\text{'}}$	$M_> ::= >$	$M_b ::= b$
$S ::= M_<HM_>M_{:}M_{:}M_{=}M_{.}$			$M_{\text{'}} ::= \text{'}$	$H ::= \mathbf{c}$
			$M_{.} ::= \mathbf{.}$	$M_c ::= c$
			$M_{:} ::= \mathbf{:}$	
			$M_{=} ::= \mathbf{=}$	

4. Im letzten Schritt werden Produktionen der Form $A := Bw$ durch $A ::= BA_2$ und $A_2 ::= w$ mit neuem A_2 rekursiv ersetzt.

$S' ::= S \mid \varepsilon$	$D ::= DD$	$D_2 ::= M_<D_3$	$H ::= HH$	$H ::= \mathbf{a}$
		$D_3 ::= HD_4$		
		$D_4 ::= M_>D$		
		$D ::= M_<D_5$		
		$D_5 ::= HM_>$		
$S ::= M_<S_2$	$D ::= M_{\vert}D$	$D ::= M_{\text{'}}D_6$	$M_{\vert} ::= \vert$	$M_a ::= \mathbf{a}$

$S_2 ::= HS_3$	$D ::= \mathbf{l}$	$D_6 ::= HD_7$	$M_< ::= \mathbf{<}$	$H ::= \mathbf{b}$
$S_3 ::= M_>S_4$		$D_7 ::= M_,D$	$M_> ::= \mathbf{>}$	$M_b ::= b$
$S_4 ::= M_:S_5$		$D ::= M_,D_8$	$M_, ::= \mathbf{'}$	$H ::= \mathbf{c}$
$S_5 ::= M_:S_6$		$D_8 ::= HM_,$	$M_. ::= \mathbf{.}$	$M_c ::= c$
$S_6 ::= M_=S_7$			$M_: ::= \mathbf{:}$	
$S_7 ::= DS_8$			$M_= ::= \mathbf{=}$	
$S_8 ::= M_.S$				
$S ::= M_<S_{10}$				
$S_{10} ::= HS_{11}$				
$S_{11} ::= M_>S_{12}$				
$S_{12} ::= M_:S_{13}$				
$S_{13} ::= M_:S_{14}$				
$S_{14} ::= M_=S_{15}$				
$S_{15} ::= DM_.$				
$S ::= M_<S_{20}$				
$S_{20} ::= HS_{21}$				
$S_{21} ::= M_>S_{22}$				
$S_{22} ::= M_:S_{23}$				
$S_{23} ::= M_:S_{24}$				
$S_{24} ::= M_=S_{25}$				
$S_{25} ::= M_.S$				
$S ::= M_<S_{30}$				
$S_{30} ::= HS_{31}$				
$S_{31} ::= M_>S_{32}$				
$S_{32} ::= M_:S_{33}$				

$S_{33} ::= M_{:}S_{34}$
$S_{34} ::= M_{=}M_{.}$

Nach soviel Handharbeit, kann man nur hoffen, daß alles richtig ist …

b) $\Pi_b : (a^n b^n c^m : n, m \geq 1)$

$$S ::= AB, \ A ::= ab \mid aAb, \ B ::= c \mid cB$$

Schneller kommt man bei einfachen Grammatiken durch „Hinschauen“ zum Ziel: Die neuen Produktionen: $S ::= AB$, $A ::= M_aM_b$, $A ::= A_1M_b$, $A_1 ::= M_aA$, $B ::= c$, $B ::= M_cB$, $M_a ::= a$, $M_b ::= b$ und $M_c ::= c$

c) Π_c : (TicTacToe)

S ::= × × × UUUUUU	S ::= UUU × × × UUU	S ::= UUUUUU × × ×
S ::= × UU × UU × UU	S ::= U × UU × UU × U	S ::= UU × UU × UU ×
S ::= × UUU × UUU ×	S ::= UU × U × U × UU	U ::= × | O | leer

Und wieder mit Hinschauen bildet man zunächst Produktionen U_i für i aufeinanderfolgende U ‘s: $U_1 ::= \times \mid O \mid$ leer, $U_2 ::= UU$, $U_3 ::= U_2U$, $U_4 ::= U_3U$, $U_5 ::= U_4U$, $U_6 ::= U_5U$

Das gleiche für Produktionen X_i: $X_1 ::= \times$, $X_2 ::= X_1X_1$, $X_3 ::= X_2X_1$

Und schließlich die neuen S -Produktionen:

$S ::= X_3U_6$	$S ::= U_3S_1$	$S ::= U_6X_3$
	$S_1 ::= X_3U_3$	
$S ::= S_2S_3$	$S ::= S_4S_5$	$S ::= S_6S_7$
$S_2 ::= X_1U_2$	$S_4 ::= U_1X_2$	$S_6 ::= U_2X_1$
$S_3 ::= S_2S_2$	$S_5 ::= S_4S_4$	$S_7 ::= S_6S_6$
$S ::= X_1S_8$	$S ::= S_{10}U_1$	
$S_8 ::= S_9S_9$	$S_{10} ::= S_{11}S_{13}$	
$S_9 ::= U_3X_1$	$S_{11} ::= S_{12}S_{13}$	
	$S_{12} ::= U_1S_{13}$	
	$S_{13} ::= U_1X_1$	

Aufgabe 5 Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (Schuster)

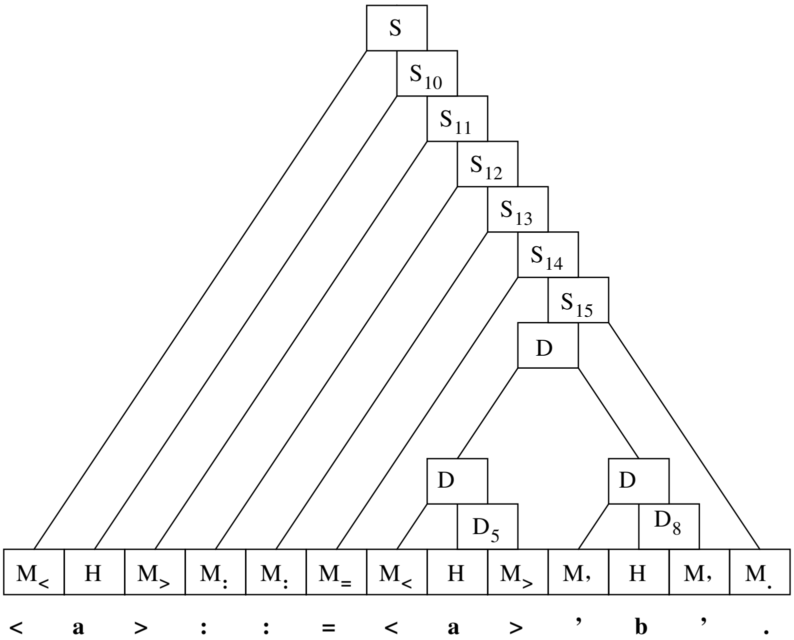
Verwenden Sie den CYK-Algorithmus.

a) Die Grammatik G_a (EBNF') mit den Produktionen

S ::= ε	A ::= FA'	F ::= **<K>**F	K ::= ZK'	Z ::= **a**
S ::= **<K> ::=** A . S	A' ::= ε	F ::= **'**K**'**F	K' ::= ε	Z ::= **b**
	A' ::= **|**A	F ::= ε	K' ::= ZK'	Z ::= **c**

Zeigen Sie **<a>::=<a>'b'.** ∈ L(G_a)

Mit den Produktionen in Chomsky-Normalform, wie sie in einer anderen Aufgabe hergeleitet wurden, ergibt sich folgende „Pyramide".

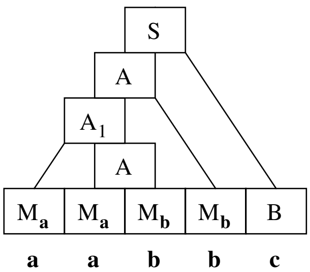


b) Die Grammatik G_b ($a^n b^n c^m$: n, m ≥ 1) mit den Produktionen

S ::= AB , A ::= ab | aAb , B ::= c | cB

Zeigen Sie aabbc ∈ L(G_b) .

Mit den Produktionen der Chomsky-Normalform, siehe andere Aufgabe, ergibt sich:



c) Die Grammatik G_c (TicTacToe) mit den Produktionen

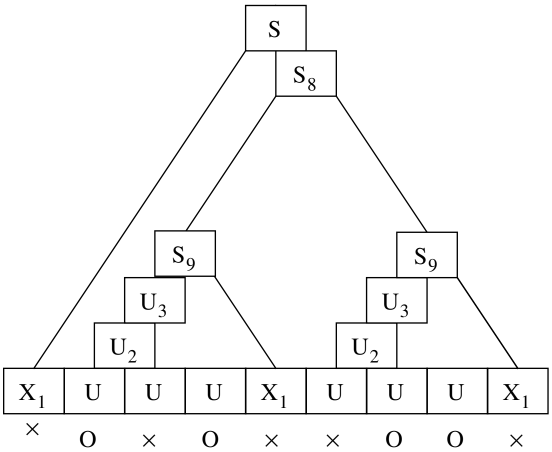
S ::= × × × UUUUUU   S ::= UUU × × × UUU   S ::= UUUUUU × × ×

S ::= × UU × UU × UU   S ::= U × UU × UU × U   S ::= UU × UU × UU ×

S ::= × UUU × UUU ×   S ::= UU × U × U × UU   U ::= × | O | leer

Zeigen Sie × O × O × × OO × $\in L(G_c)$.

Erneut mit den Chomsky-Normalform Produktionen der vorangehenden Aufgabe erhalten wir:



Aufgabe 6 Satzformen (Schuster)

Für eine kontextfreie Grammatik sei für ein $w \in V^*$ die Menge
$f(w) := \{t : w \Rightarrow tx \text{ mit } tx \in TV^*\}$ definiert.

a) Bestimmen Sie für die Produktionen $S ::= S + P \mid P$, $P ::= P \cdot F \mid F$, $F \mid v \mid (S)$
die Mengen $f(F)$ und $f(P)$.

Es gilt $f(F) = \{v, (\}$ und $f(P) = \{v, (\}$.

b) Bestimmen Sie für die Produktionen

S ::= ε	A ::= FA'	F ::= **<K>**F	K ::= ZK'	Z ::= **a**
S ::= **<K> ::=** A . S	A' ::= ε	F ::= **'**K**'**F	K' ::= ε	Z ::= **b**
	A' ::= **|**A	F ::= ε	K' ::= ZK'	Z ::= **c**

die Mengen $f(Z)$, $f(K)$ und $f(A)$.

Es gilt $f(Z) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, $f(K) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ und $f(A) = \{\mathbf{<}, \mathbf{'}, \varepsilon, \mathbf{|}\}$

c) Können Sie einen Algorithmus zur Bestimmung von $f(w)$ skizzieren?

Die Funktion f ist eine Vorform von $First_1$. Siehe Skriptum, „Drachenbuch“ oder http://www.cs.rochester.edu/u/scott/254/notes/02-syntax, etc.