



## Übungsblatt 6 – Lösungsvorschläge

23.11.2001

### Aufgabe 1 Ein-Ausgabeverhalten von endlichen Automaten

(Bierwald)

a)

LÄNGENTREUE. Induktion über die Länge  $n$  der Worte  $w$ .

*Induktionsanfang.*  $n = 0$ . Dann  $w = \varepsilon$  und  $\lambda_q(w) = \lambda_q(\varepsilon) = \lambda(q, \varepsilon) = \varepsilon$  hat ebenfalls die Länge 0.

*Induktionshypothese.* Die Behauptung gilt für alle  $w$  mit  $|w| = n - 1$ .

*Induktionsschritt.*  $n > 0$ . Dann  $w = ut$  (wobei  $u \in T^*$  und  $t \in T$ ) und

$$\begin{aligned} & \lambda_q(w) \\ &= \lambda_q(ut) \\ &= \lambda(q, ut) \text{ [Definition } \lambda_q] \\ &= \lambda(q, u) \lambda_0(\langle qu \rangle, t) \text{ [Konstruktion von } \lambda] \\ &= \lambda_q(u) \lambda_0(\langle qu \rangle, t) \text{ [Definition } \lambda_q] \end{aligned}$$

Nach Induktionshypothese hat  $\lambda_q(u)$  die Länge  $n-1$  (schließlich ist  $u$  um 1 kürzer als  $w$ ). Es hat ferner  $\lambda_0(\langle qu \rangle, t)$  die Länge 1 und somit  $\lambda_q(w)$  die Länge  $(n-1) + 1 = n$ .

ANFANGSTREUE. Sei  $u$  Anfangsstück von  $v$ , d.h.  $v = uw$  für ein  $w \in T^*$ ;  $q$  beliebig

Dann  $\lambda_q(uw)$

$$\begin{aligned} &= \lambda(q, uw) \text{ [Definition } \lambda_q] \\ &= \lambda(q, u) \lambda(\langle qu \rangle, w) \text{ [wegen Sequentialität]} \\ &= \lambda_q(u) \lambda(\langle qu \rangle, w) \text{ [Definition } \lambda_q] \end{aligned}$$

Mithin  $\lambda_q(u)$  ist Anfangsstück von  $\lambda_q(v)$ .

ABLEITUNGSENDLICHKEIT. Es sei  $q$  beliebiger Zustand und  $f = \lambda_q$

Zunächst überlege man sich, daß die Ableitung, sofern sie existiert, eindeutig sein muß.

Zu  $w \in T^*$  definieren wir  $f_w = \lambda_{\langle qw \rangle}$  und zeigen, dass  $f_w$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $w$  ist.

Für alle  $wu$  gilt (Einsetzen der Definitionen und Ausnutzen der Sequentialität):

$$\begin{aligned} f(wu) &= \lambda_q(wu) = \lambda(q, wu) = \lambda(q, w) \lambda(\langle qw \rangle, u) = \lambda_q(w) \lambda_{\langle qw \rangle}(u) = \lambda_q(w) f_w(u) \\ &= f(w) f_w(u) \end{aligned}$$

Es ist also  $f_w$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $w$ .

Da der Automat nur endlich viele Zustände hat, ist die Menge  $\{\langle qw \rangle \mid w \in T^*\}$  endlich. Mithin ist die Menge  $\{f_w \mid w \in T^*\}$  ebenfalls endlich und  $f$  daher ableitungsendlich.

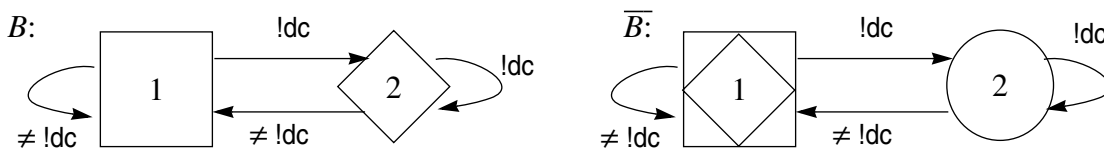
b) Sie sagen Ihrem Chef, daß er den Auftrag nicht hätte annehmen sollen. Die Funktion

$f: T^* \rightarrow T^*$  mit  $f(w) = w^c$  ist nämlich nicht anfangstreu. Es ist zum Beispiel 0 ein Anfangsstück von 01, aber  $f(0) = 0$  kein Anfangsstück von  $f(01) = 10$ . Da jede Funktion die zum Ein-Ausgabeverhalten eines endlichen Automaten gehört anfangstreu ist, kann es keinen endlichen Automaten für diese Funktion geben.

**Aufgabe 2** Kommunikationsprotokoll, Produktakzeptor (Bierwald)

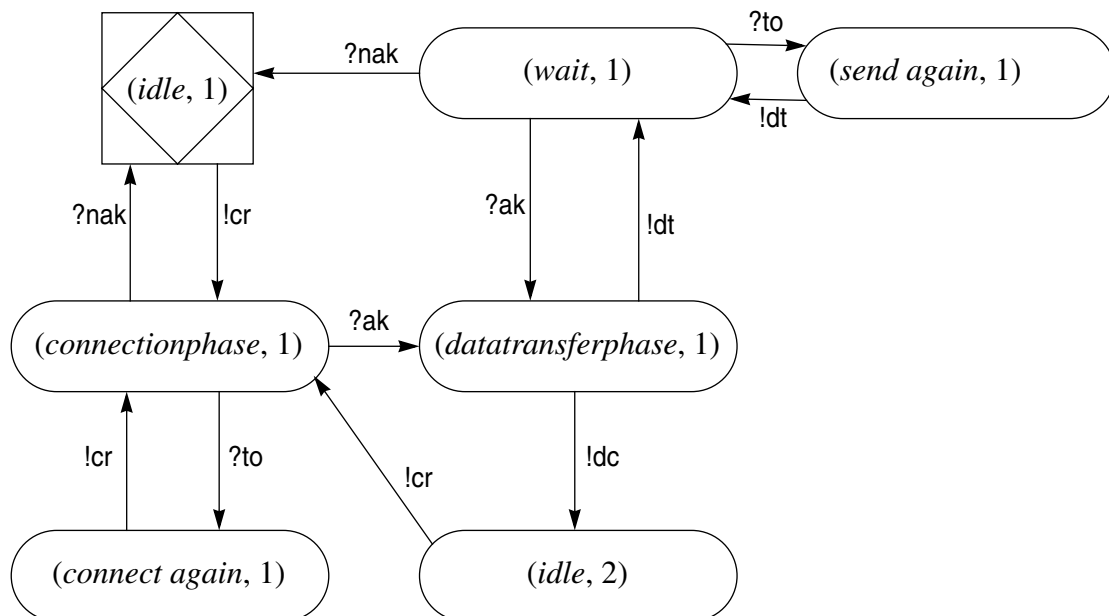
a) Zu Beginn ist der Sender im Zustand *idle*. Mit dem Senden eines *cr*, wechselt er in den Zustand *connectionphase* und wartet auf eine Bestätigung *ak*. Erhält er ein Timeout-Signal, so sendet er ein weiteres Mal ein *cr* und wartet weiter. Erhält er eine Ablehnung *nak*, wechselt er wieder in der Startzustand *idle*. Mit dem Erhalt der Bestätigung wechselt er in den Zustand *datatransferphase*. Entweder sendet er einen Verbindungsabbauwunsch *dc* und geht zurück in den Startzustand *idle*, oder er sendet ein Datenpaket *dt* und geht in den Zustand *wait* über, um auf eine Bestätigung zu warten. Erhält er eine solche, geht er zurück in den Zustand *datatransferphase*. Erhält er ein Timeout-Signal, so sendet er ein weiteres Mal ein *dt* und wartet weiter auf eine Bestätigung. Erhält er eine Ablehnung *nak*, wechselt er wieder in der Startzustand *idle*.

b)



Dabei stehe  $\neq !dc$  für *!cr*, *?ak*, *?nak*, *?to*, *!dt*

Wir bilden den Produktakzeptor von  $A$  und  $\overline{B}$ , wobei wir Zustände, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind, weglassen. Dieser akzeptiert die gewünschte Sprache.



c) Wie man leicht sieht, ist die akzeptierte Sprache  $L(A) \cap \overline{L(B)}$  nicht leer, was bedeutet, daß  $L(A)$  nicht in  $L(B)$  enthalten sein kann. Jedes Wort aus  $L(A) \cap \overline{L(B)}$ , wie beispielsweise  $\epsilon$ , *!cr ?nak* oder *!cr ?ak !dt ?nak* ist ein Gegenbeispiel für die Behauptung  $L(A) \subseteq L(B)$ . Damit

haben wir bewiesen, daß nicht jede abgeschlossene Folge von Aktionen des Senders mit einem Verbindungsabbauwunsch seitens des Senders endet.

### Aufgabe 3 Reguläre Ausdrücke

(Bierwald)

a) Seien  $r, s, t \in RA$ ,  $a, b \in T$

*Behauptung.*  $\sqsubset$  ist nicht symmetrisch.

*Beweis.* Sei  $r = a$  und  $s = (a + b)$ .

Dann  $L(r) = \{a\} \subseteq \{a, b\} = L(s)$  und somit  $r \sqsubset s$ .

Andererseits gilt  $L(s) \subseteq L(r)$  nicht und damit gilt  $s \sqsubset r$  nicht.

*Behauptung.*  $\sqsubset$  ist nicht antisymmetrisch.

*Beweis.* Sei  $r = (a + b)$  und  $s = (b + a)$ .

Dann  $L(r) = L(s) = \{a, b\}$  und somit  $L(r) \subseteq L(s)$  sowie  $L(s) \subseteq L(r)$

Dann  $r \sqsubset s$  und  $s \sqsubset r$  aber  $r \neq s$ .

*Behauptung.*  $\equiv$  ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Das folgt sofort aus den Eigenschaften der Gleichheit von Mengen.

*Behauptung.*  $\equiv$  ist nicht antisymmetrisch.

*Beweis:* Sei  $r = (a + b)$  und  $s = (b + a)$ .

Dann  $L(r) = L(s) = \{a, b\}$  und somit  $L(r) \subseteq L(s)$  und  $L(s) \subseteq L(r)$

Dann  $r \equiv s$  und  $s \equiv r$  aber  $r \neq s$ .

Damit ist  $\sqsubset$  weder Äquivalenzrelation (fehlende Symmetrie) noch Ordnung (fehlende Antisymmetrie). Die Relation  $\equiv$  ist eine Äquivalenzrelation aber keine Ordnung (fehlende Antisymmetrie).

b) Seien  $r, s, t \in RA$ .

*Behauptung.*  $(r(s + t)) \equiv ((rs) + (rt))$ , d.h.  $L(r)(L(s) \cup L(t)) = L(r)L(s) \cup L(r)L(t)$

*Beweis.*

„ $\subseteq$ “: Sei  $w \in L(r)(L(s) \cup L(t))$ . Dann  $w = uv$  mit  $u \in L(r)$  und  $v \in L(s) \cup L(t)$ .

1. Fall:  $v \in L(s)$ . Dann  $w = uv \in L(r)L(s) \subseteq L(r)L(s) \cup L(r)L(t)$ .

2. Fall:  $v \notin L(s)$ . Dann  $v \in L(t)$  und  $w = uv \in L(r)L(t) \subseteq L(r)L(s) \cup L(r)L(t)$ .

„ $\supseteq$ “: Ähnlich: Übung!

c) Seien  $r, s \in RA$ .

*Behauptung 1.* Wenn  $r \sqsubset s$ , dann  $(r^*) \sqsubset (s^*)$ .

*Beweis.* Sei  $r \sqsubset s$  und  $w \in L((r^*))$ . Wir müssen  $w \in L((s^*))$  zeigen.

Dann  $w \in L(r)^*$ , woraus  $w \in L(r)^k$  für ein  $k \geq 0$  folgt.

Dann  $w = w_1 \dots w_k$  mit  $w_1, \dots, w_k \in L(r)$ .

Wegen  $r \sqsubset s$  ist  $L(r) \subseteq L(s)$  und damit jedes der  $w_i$  mit  $i \in \{1, \dots, k\}$  in  $L(s)$  enthalten.

Damit folgt sofort  $w = w_1 \dots w_k \in L(s)^k$  und mit  $L(s)^k \subseteq L(s)^* = L((s^*))$  schließlich  $w \in L((s^*))$ .

**Behauptung 2.**  $r \sqsubset (r^*)$

**Beweis.** Sei  $w \in L(r)$ . Mit  $L(r) \subseteq L(r)^* = L((r^*))$  folgt sofort  $w \in L((r^*))$  und damit die Behauptung.

**Behauptung 3.**  $(r^*) \equiv ((r^*)^*)$

**Beweis.** Wir stellen zunächst einmal fest, daß  $r \equiv s$  genau dann gilt, wenn  $r \sqsubset s$  und  $s \sqsubset r$ . Dann müssen wir wegen 2 nur noch  $((r^*)^*) \sqsubset (r^*)$  zeigen.

Sei also  $w \in L(((r^*)^*))$ , woraus unmittelbar  $w \in L((r^*))^*$  folgt. Wir müssen  $w \in L((r^*))$  zeigen.

Dann  $w \in L((r^*))^k$  für ein  $k \geq 0$ , d.h.  $w = w_1 \dots w_k$  mit  $w_1, \dots, w_k \in L((r^*))$ .

Damit liegt jedes der  $w_i$  mit  $i \in \{0, \dots, k\}$  in  $L(r)^*$  und somit in  $L(r)^{k_i}$  für ein  $k_i \geq 0$ . Das Wort  $w_i$  ist also von der Form  $w_i = w_{i,1} \dots w_{i,k_i}$  mit  $w_{i,j} \in L(r)$ , wobei  $j \in \{1, \dots, k_i\}$ .

Mithin ist

$$w = w_1 \dots w_k = \underbrace{w_{1,1} \dots w_{1,k_1}}_{w_1} \dots \underbrace{w_{i,1} \dots w_{i,k_i}}_{w_i} \dots \underbrace{w_{k,1} \dots w_{k,k_k}}_{w_k}$$

in  $L(r)^{k_1 + \dots + k_k}$  und somit in  $L(r)^* = L((r^*))$  enthalten.

### Aufgabe Halbgruppen

(Käufli)

Eine Halbgruppe  $H$  ist eine Menge, auf der eine assoziative zweistellige Operation  $\circ$  definiert ist.  $e \in H$  ist *Linkseins*, wenn  $e \circ h = h$  für alle  $h \in H$ , *Rechtseins*, wenn  $h \circ e = h$  für alle  $h \in H$  und *Einselement*, wenn  $e$  Rechts- und Linkseins ist.

a) Zeigen Sie: Gibt es in einer Halbgruppe eine Links- und eine Rechtseins, dann sind sie gleich.

Die Halbgruppe habe  $e_l$  als Links- und  $e_r$  als Rechtseins. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} e_l \circ e_r &= e_r & e_l \text{ ist Linkseins} \\ e_l \circ e_r &= e_l & e_r \text{ ist Rechtseins} \end{aligned}$$

Daraus folgt messerscharf  $e_l = e_r$ .

b) Zeigen Sie: Hat eine Halbgruppe ein Einselement, dann ist es eindeutig. Was folgt daraus für Worthalbgruppen?

Die Halbgruppe habe die Einselemente  $e_1$  und  $e_2$ ,

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_2 &= e_2 & e_1 \text{ ist auch Linkseins} \\ e_1 \circ e_2 &= e_1 & e_2 \text{ ist auch Rechtseins} \end{aligned}$$

Also  $e_1 \circ e_2 = e_2$ .

Da in Worthalbgruppen  $\varepsilon$  das Einselement ist, ist das leere Wort eindeutig.

c) Zeigen Sie, daß jedes nichtleere Wort  $w \in V^*$  eindeutig in der Form  $w = a_1 \dots a_n$  mit  $a_1, \dots, a_n \in V$  dargestellt werden kann und daß aus  $u = w$  folgt, daß  $u$  und  $w$  die gleiche Länge haben.

Nichtleere Wörter sind (endliche) Folgen von Zeichen aus  $V$  und endliche Folgen sind Abbildungen  $\{1, \dots, n\} \rightarrow V$ . Aus der Abbildungseigenschaft folgt  $w(i) \in V$  ist eindeutig. Daß  $u$  und  $w$  die gleiche Länge haben, folgt ebenfalls aus der Abbildungseigenschaft.

d) Zeigen Sie, daß in Worthalbgruppen die Kürzungsregeln gelten ( $w, u_1, u_2$  Worte über einem beliebigen Alphabet): Wenn  $wu_1 = wu_2$ , dann  $u_1 = u_2$  und wenn  $u_1w = u_2w$ , dann  $u_1 = u_2$ .

Ist  $w = \varepsilon$ , dann  $wu_1 = u_1$  und  $wu_2 = u_2$ , also  $u_1 = u_2$ .

Für nichtleere Worte  $w$  folgt aus der eindeutigen Darstellung  $u_1(i) = u_2(i)$ .

Ist  $u_1w = u_2w$ , dann  $(u_1w)^c = (u_2w)^c$ ,  $w^c u_1^c = w^c u_2^c$  und mit der bereits bewiesenen Kürzungsregel folgt die Behauptung.

e) Geben Sie eine Halbgruppe an, in der die Kürzungsregeln nicht gelten.

Die Halbgruppe habe die Elemente 0 und 1, und  $a \circ b = b$  für alle  $a, b \in \{0, 1\}$ .