



Übungsblatt 5 – Lösungsvorschläge

16.11.2001

Aufgabe 1 Endlicher Akzeptor für das Komplement einer regulären Sprache (Bierwald)

Gegeben sei ein endlicher Akzeptor A für eine reguläre Sprache L . Wir erhält man einen endlichen Akzeptor \bar{A} , der das Komplement von L , also $\bar{L} = T^* - L$, akzeptiert?

Man bestimme den zu A gehörenden Teilmengenakzeptor und vertausche anschließend Final- und Nicht-Finalzustände.

Aufgabe 2 Produktkonstruktion (Bierwald)

Es seien A und B deterministische Akzeptoren über dem Eingabealphabet T . Alle Produktionen seien von der Form $qx ::= q'$ mit $x \in T$ und q, q' aus der jeweiligen Zustandsmenge. Die nachfolgende Tabelle beschreibt den Produktakzeptor $A \times B$.

	A	B	$A \times B$
Zustandsmenge	Q	R	$Q \times R$
Eingabealphabet	T	T	T
Startzustand	q_0	r_0	(q_0, r_0)
Finalmenge	F_A	F_B	$F_A \times F_B$
Produktionen	Π_A	Π_B	Π

mit $\Pi = \{(q, r)a ::= (q', r') : qa ::= q' \in \Pi_A, ra ::= r' \in \Pi_B\}$

Zeigen Sie, daß für alle $q, q' \in Q$, $r, r' \in R$ und $w \in T^*$ gilt:

Wenn $qw \Rightarrow q'$ mit Produktionen aus Π_A und $rw \Rightarrow r'$ mit Produktionen aus Π_B , dann auch $(q, r)w \Rightarrow (q', r')$ mit Produktionen aus Π und umgekehrt.

Welche Sprache akzeptiert $A \times B$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Behauptung „Wenn $qw \Rightarrow q'$ mit Produktionen ...“.

Beweis (Induktion über $n = |w|$).

VON LINKS NACH RECHTS:

Induktionsanfang. $n = 0$. Dann $w = \varepsilon$.

Es gelte $qw \Rightarrow q'$ und $rw \Rightarrow r'$. Dann $q \Rightarrow q'$ und $r \Rightarrow r'$ und weil es keine spontanen Übergänge gibt: $q = q'$ und $r = r'$. Dann folgt sofort $(q, r) = (q', r')$ und wegen $w = \varepsilon$ muß dann auch $(q, r)w = (q', r')$ sein, woraus unmittelbar $(q, r)w \Rightarrow (q', r')$ folgt.

Induktionshypothese. Behauptung gilt für alle $q, q' \in Q, r, r' \in R$ und w mit $|w| < n$.

Induktionsschritt. $n > 0$. Dann $w = av$ für ein $a \in T$ und $v \in T^*$.

Es gelte $qw \Rightarrow q'$ und $rw \Rightarrow r'$, also $qav \Rightarrow q'$ und $rav \Rightarrow r'$.

Wegen $qav \neq q'$, muß die Ableitung $qav \Rightarrow q'$ aus mindestens einem Schritt bestehen. Wir können also den ersten Schritt abtrennen: $qav \rightarrow q_1v \Rightarrow q'$ und stellen fest, daß es eine Produktion $qa ::= q_1 \in \Pi_A$ geben muß.

Auf ähnliche Weise zerlegen wir die Ableitung $rw \Rightarrow r'$ und bekommen $rav \rightarrow r_1v \Rightarrow r'$ sowie eine Produktion $ra ::= r_1 \in \Pi_B$.

Wir halten fest:

(1) $(q, r)a ::= (q_1, r_1) \in \Pi$, wegen $qa ::= q_1 \in \Pi_A$ und $ra ::= r_1 \in \Pi_B$, und damit

gilt $(q, r)a \rightarrow (q_1, r_1)$

(2) $(q_1, r_1)v \Rightarrow (q', r')$, wegen Induktionshypothese ($|v| < n$, $q_1v \Rightarrow q'$ und $r_1v \Rightarrow r'$)

Wegen (1) gilt $(q, r)av \rightarrow (q_1, r_1)v$ und zusammen mit (2) erhalten wir

$(q, r)av \rightarrow (q_1, r_1)v \Rightarrow (q', r')$, womit $(q, r)w \Rightarrow (q', r')$ gezeigt wäre.

VON RECHTS NACH LINKS: Ähnlich der ersten Richtung (Übung!).

Behauptung. Der Produktakzeptor akzeptiert die Sprache $L(A \times B) = L(A) \cap L(B)$.

Beweis.

$L(A \times B) \subseteq L(A) \cap L(B)$: Sei $z \in L(A \times B)$. Dann $(q_0, r_0)z \Rightarrow (q_f, r_f)$ für ein $(q_f, r_f) \in F_A \times F_B$ und somit $q_f \in F_A$ und $r_f \in F_B$. Dann $q_0z \Rightarrow q_f$ und $r_0z \Rightarrow r_f$ (oberer Hilfssatz) und schließlich $z \in L(A)$ und $z \in L(B)$, also $z \in L(A) \cap L(B)$.

$L(A \times B) \supseteq L(A) \cap L(B)$: Ähnlich (Übung!).

Aufgabe 3 Pumplemma für reguläre Grammatiken

(Bierwald)

Das Pumplemma für reguläre Grammatiken lautet: „Zu jeder regulären Grammatik G gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so daß jedes Wort $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$ in Teilworte $u, v, w \in T^*$ zerlegt werden kann, also $z = uvw$, mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$ und $uv^i w \in L(G)$ für alle $i \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Lemmas, daß die Sprache $\{a^n b^n : n \geq 0\}$ nicht regulär sein kann.

Annahme. Die Sprache $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ ist regulär.

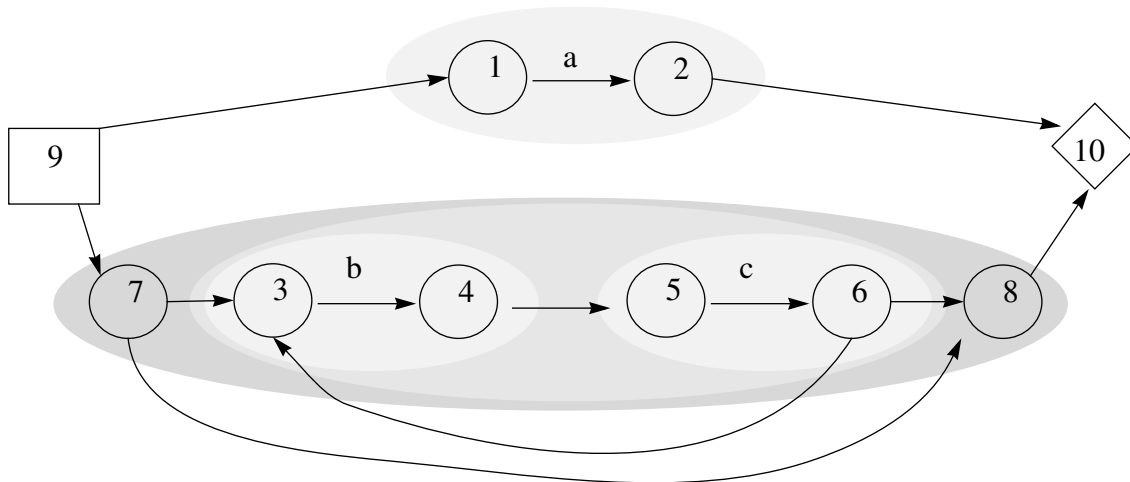
Dann gibt es eine reguläre Grammatik G mit $L = L(G)$.

Sei n die Zahl aus dem Pumplemma. Wir betrachten das Wort $z = a^n b^n$. Dieses kann zerlegt werden – $z = uvw$ – mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$ und $uv^i w \in L(G)$.

Wegen $|uv| \leq n$ muß das Teilwort uv vollständig innerhalb der as liegen. Wegen $v \neq \varepsilon$ hat das Wort uw weniger as als bs , kann also nicht zu $L(G)$ gehören. Andererseits muß wegen $uv^i w \in L(G)$ das Wort $uw = uv^0 w$ zu $L(G)$ gehören. Dies ist ein Widerspruch und die Annahme, daß L regulär ist, muß demnach falsch sein.

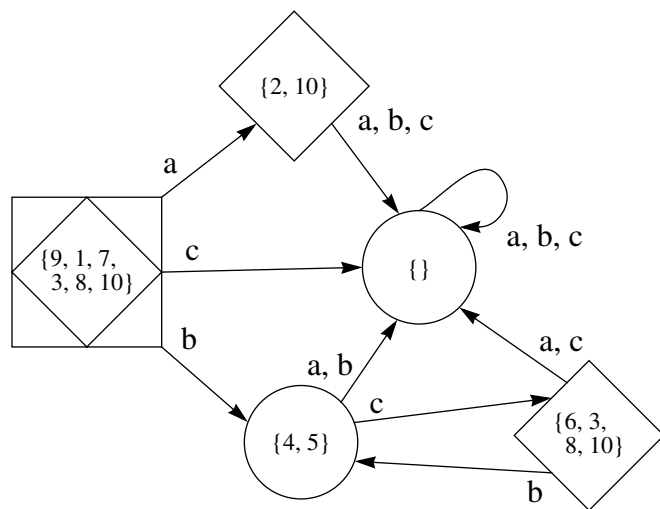
Aufgabe 4 Reguläre Ausdrücke, Teilmengenkonstruktion (Bierwald)

Geben Sie einen vollständigen, deterministischen Akzeptor ohne spontane Übergänge an, der die Sprache $L(a + (bc)^*)$ akzeptiert. Konstruieren Sie dazu zunächst einen unvollständigen endlichen Akzeptor, der spontane Übergänge besitzen darf und bestimmen Sie anschließend den zugehörigen Teilmengenakzeptor.



	a	b	c
9	-	-	-
1	2 (10)	-	-
7	-	-	-
3	-	4 (5)	-
8	-	-	-
10	-	-	-
2	-	-	-
10	-	-	-
4	-	-	-
5	-	-	6 (3, 8, 10)
6	-	-	-
3	-	4 (5)	-
8	-	-	-
10	-	-	-
-	-	-	-

Teilmengenakzeptor



Aufgabe 5 Moore- und Mealy-Automaten

(Schuster)

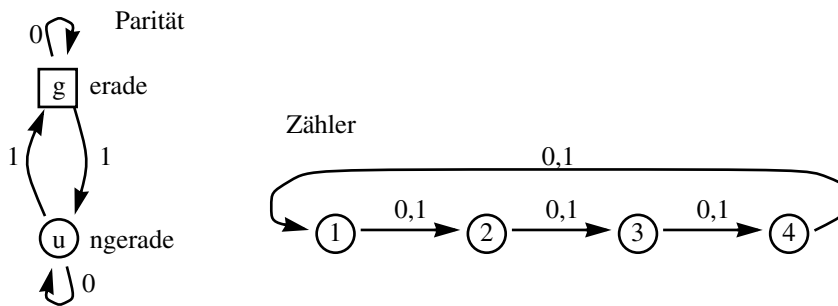
Erstellen Sie die Zustandsübergangsdiagramme von Moore- und Mealy-Automaten für

- a) Einer-Komplement: Invertieren Sie einen eingehenden Bit-Strom.

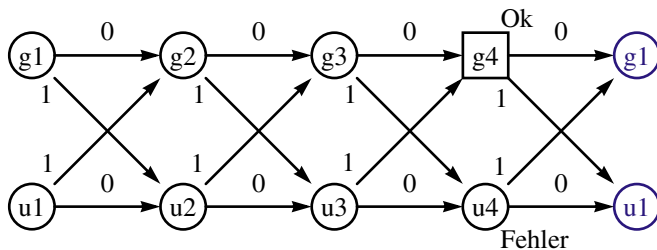


- b) Parität: Überprüfen Sie die Parität eines Bit-Stroms. Es werden immer Gruppen von 4 Bits gesendet. Davon sind die ersten 3 Bits Informationen und das 4. Bit ergänzt die Information auf eine gerade Parität. Beispiel: 0000 1001 0101 1100

Unabhängig vom Automatentyp, müssen die Bits gezählt werden und die Parität bekannt sein.

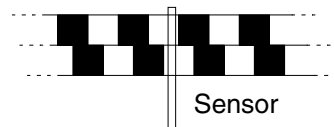


Die Kombination beider Automaten:

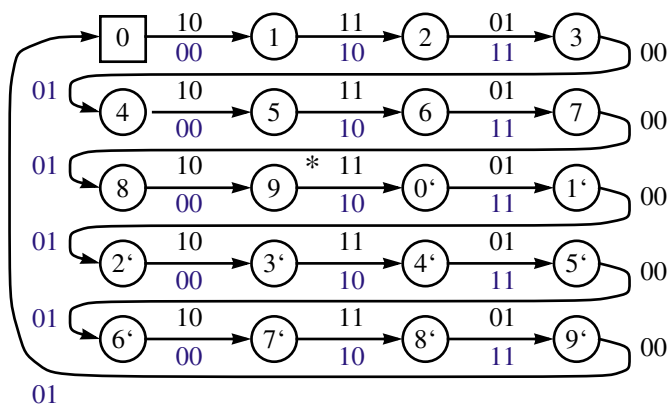


Der Zustand g_4 – alles Ok – ist der Startzustand. Nach vier eingelesenen Bits wird g_4 oder u_4 erreicht, d.h. die Parität war gerade oder ungerade.

- c) Gray-Code: Ein Modulo-10-Zähler soll mit einem digitalen Drehrad gesteuert werden. Auf dem Drehrad wurde nebenstehende Gray-Code-Skala aufgebracht. Anhand der am Sensor anliegenden Werte kann die Drehrichtung ermittelt werden. Eine Drehung in die eine Richtung soll den Zähler vermindern, in die andere Richtung erhöhen.



Die Markierung 00 soll dem Wert 0 entsprechen 10 dem Wert 1, 11 dem Wert 2, etc. Nach 20 Zuständen (2 mal 10-Zählerwerte und 5 mal 4 Graycodezahlen) erreicht man wieder den Ausgangszustand.



* Übergang zu 0 wäre falsch!

blau für Rückkante

Aufgabe 6 Relationenalgebra

(Käufel)

Zur Relation R , ist $R^{-1} := \{(b, a) : (a, b) \in R\}$ die zur R gehörende konverse Relation. Sind R und S Relationen, dann ist $RS := \{(a, b) : \text{es gibt ein } c \text{ mit } (a, c) \in R \text{ und } (c, b) \in S\}$.

Zeigen Sie:

a) Sind R und S Äquivalenzrelationen, dann auch $R \cap S$.

Da $(a, a) \in R$ und $(a, a) \in S$ für alle a , ist $R \cap S$ reflexiv. Ist $(a, b) \in R \cap S$, dann $(a, b) \in R, S$ und da R und S Äquivalenzrelationen sind, ist $(b, a) \in R, S$. $R \cap S$ ist somit symmetrisch. Sind $(a, b), (b, c) \in R \cap S$, dann $(a, b), (b, c) \in R, S$. Daraus folgt $(a, c) \in R, S$ und somit ist $R \cap S$ transitiv.

b) Das Relationenprodukt ist assoziativ und erfüllt die Distributivgesetze $P(R \cup S) = PR \cup PS$ und $(R \cup S)P = RP \cup SP$. Weiters gilt $R^i R = RR^i$.

Zum Nachweis der Assoziativität ist $(RS)T = R(ST)$ nachzuweisen.

$(a, b) \in (RS)T$ gilt genau dann, wenn es ein c gibt, sodaß $(a, c) \in RS$ und $(c, b) \in T$. Dies gilt genau dann, wenn es ein c und d gibt, sodaß $(a, d) \in R, (d, c) \in S$ und $(c, b) \in T$, was zu es gibt ein d , sodaß $(a, d) \in R$ und $(d, b) \in ST$ äquivalent ist. Die letzte Aussage trifft genau dann zu, wenn $(a, b) \in R(ST)$.

$(a, b) \in P(R \cup S)$ trifft genau dann zu, wenn es ein c gibt mit $(a, c) \in P$ und $(c, b) \in R$ oder $(c, b) \in S$. Dies gilt genau dann, wenn $(a, b) \in PR$ oder $(a, b) \in PS$.

$(a, b) \in (R \cup S)P$ gilt genau dann, wenn es ein c gibt, sodaß $(a, c) \in R$ oder $(a, c) \in S$ und $(c, b) \in P$. Die letzte Aussage ist zu $(a, b) \in RP \cup SP$ äquivalent.

$R^i R = RR^i$ zeigen wir durch Induktion über i ($i \geq 1$).

(i) Für $i = 1$ haben wir die wichtige Gleichung $R^1 R = RR^1$.

(ii) $(a, b) \in R^{i+1} R$ gilt genau dann, $(a, b) \in (R^i R) R$. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned} (R^i R) R &= (RR^i) R \\ &= R(R^i R) \end{aligned}$$

Assoziativität des Produkts

$$= RR^{i+1}$$

Definition von R^{i+1}

c) $(R \cup R^{-1})^*$ ist die kleinste Äquivalenzrelation, die R umfaßt.

Ist $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R^{-1}$ und umgekehrt. $S := (R \cup R^{-1})$ ist also symmetrisch. Zum Nachweis, daß S^* symmetrisch ist, zeigen wir durch Induktion:

Für alle i ist S^i symmetrisch.

(i) $(a, b) \in S^0$. Da S^0 die Gleichheit ist, ist S^0 auch symmetrisch.

(ii) $(a, b) \in S^{i+1}$. Ist $(a, b) \in S^i$, dann folgt $(b, a) \in S^i$ mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung. Im anderen Fall gibt es ein c , sodaß $(a, c) \in S^i$ und $(c, b) \in S$. Da (Induktionsvoraussetzung) S^i symmetrisch ist und S auf Grund der Definition, sind $(b, c) \in S$ und $(c, a) \in S^i$, also $(b, a) \in SS^i = S^{i+1}$.

Ist $(a, b) \in S^*$, Dann gibt es ein i , sodaß $(a, b) \in S^i$ und wie eben gezeigt, folgen daraus $(b, a) \in S^i$ und $(b, a) \in S^i$. S^* ist also symmetrisch.

Da $(R \cup R^{-1})^*$ die kleinste reflexive und transitive Relation ist, die $R \cup R^{-1}$ umfaßt, ist $(R \cup R^{-1})^*$ die kleinste Äquivalenz, die $R \cup R^{-1}$ umfaßt.

d) R ist genau dann transitiv, wenn $RR \subseteq R$. Ist R zusätzlich reflexiv, dann $RR = R$.

1. $RR \subseteq R$, sofern R transitiv.

Ist $(a, b) \in RR$, dann gibt es ein c , sodaß $(a, c), (c, b) \in R$ und da R transitiv ist, folgt $(a, b) \in R$.

2. Sei jetzt $RR \subseteq R$. Wir müssen die Transitivität von R zeigen.

Seien $(a, b), (b, c) \in R$. Dann ist $(a, c) \in RR$ und da $RR \subseteq R$, erhalten wir $(a, c) \in R$.

3. Zum Nachweis der Gleichheit müssen wir noch $R \subseteq RR$ zeigen. (Die andere Inklusion haben wir schon bewiesen.) Ist $(a, b) \in R$, dann sind, da R reflexiv, $(a, a) \in R$ und $(a, b) \in R$. Also $(a, b) \in RR$.

e) Ist das Produkt der Äquivalenzrelationen R und S kommutativ ($RS = SR$), dann ist RS die kleinste Äquivalenzrelation, die R und S umfaßt.

Wir müssen zeigen, daß RS eine Äquivalenzrelation ist.

Da $(a, a) \in R, S$ für alle a , ist auch $(a, a) \in RS$. Ist $(a, b) \in RS$, dann gibt es ein c , sodaß $(a, c) \in R$ und $(c, b) \in S$. Da R und S Äquivalenzrelationen sind, haben wir $(c, a) \in R$ und $(b, c) \in S$, woraus wir $(b, a) \in RS$ erhalten. Da $RS = SR$, ergibt sich $(b, a) \in (b, a) \in RS$.

Zum Nachweis der Transitivität von RS benutzen wir Teilaufgabe d.

$$(RS)(RS) = RSSR$$

da das Relationenprodukt assoziativ ist und $RS = SR$ vorausgesetzt

$$= RSR$$

Teilaufgabe d, S ist transitiv

$$= RRS$$

$$RS = SR$$

$$= RS$$

R ist transitiv

Also ist RS transitiv und damit Äquivalenzrelation.

RS umfaßt R und S . Ist $(a, b) \in R$, dann $(a, b) \in RS$, da $(b, b) \in R$. Ebenso erhalten wir $(a, b) \in RS$, wenn $(a, b) \in S$.

Zum Nachweis, daß RS die kleinste derartige Äquivalenz ist, benutzen wir Teilaufgabe c. $R \cup S$ ist eine Relation, die R und S umfaßt und $((R \cup S) \cup (R \cup S)^{-1})^*$ die kleinste Äquivalenzrelation, die R und S umfaßt. Es gilt

$$\begin{aligned} (R \cup S) \cup (R \cup S)^{-1} &= R \cup S \cup R^{-1} \cup S^{-1} \\ &= R \cup S \cup R \cup S \end{aligned}$$

da für reflexive Relationen die Konversenbildung die Identität ist

$$= R \cup S$$

Jetzt benutzen wir die Definition der *-Operation. Siehe Übungsblatt 3, Aufgabe 7. Für $i \geq 2$ gilt $(R \cup S)^i = RS$.

$$(i) \text{ Induktionsanfang: } (R \cup S)^2 = R^2 \cup RS \cup SR \cup S^2$$

$$= R \cup RS \cup SR \cup S$$

wegen Teilaufgabe c

$$= R \cup RS \cup S$$

da $RS = SR$

$$(ii) (R \cup S)^{i+1} = (R \cup S)^i \cup (R \cup S)^i (R \cup S)$$

$$= R \cup RS \cup S \cup (R \cup RS \cup S)(R \cup S)$$

Induktionsvoraussetzung

$$= R \cup RS \cup S \cup R^2 \cup RSR \cup SR \cup RS \cup RS^2 \cup S^2$$

$$= R \cup RS \cup S$$

da $RS = SR$

$$= R \cup RS$$

da $R, S \subset RS$

Daraus folgt $((R \cup S) \cup (R \cup S)^{-1})^* = R \cup RS \cup S = RS$ da RS eine Relation ist, die R und S umfaßt.