



Übungsblatt 3 – Lösungsvorschläge

16.11.2001

Aufgabe 1 Eine kleine Bastelaufgabe

(Bierwald)

Geben Sie eine Grammatik für die Sprache $\{a^{(m^2)} : m \in \mathbb{N}, m > 0\}$ an.

Hinweis. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Eine (dies muß weder die einzige noch die beste Lösung sein!) Grammatik für die gesuchte Sprache besteht aus den Nichtterminalen $S, A, M, E, E_{lr}, E_{rl}$ und K , den Terminalen $\$, \#$ und a sowie den folgenden Produktionen:

	1.	S	$::=$	$\$AM\#a$	Startsituation herstellen.
	2.	M	$::=$	K	In Modus „Kollaps“ wechseln.
	3.	M	$::=$	E	In Modus „Erweitern“ wechseln.
	4.	E	$::=$	AAE_{lr}	Anzahl der As um zwei erhöhen und in den Verschiebe-VonLinksNachRechts-Modus (E_{lr}) wechseln.
	5.	AE_{lr}	$::=$	$E_{lr}Aa$	As auf die rechte Seite bringen, dabei für jedes A ein a hinzufügen.
Erweitern	6.	aA	$::=$	Aa	As und as sortieren (aus $\dots AaAaAa\dots$ wird $\dots AAAaaa\dots$).
	7.	$\$E_{lr}$	$::=$	$\$E_{rl}$	Wenn alle As verschoben, in den VerschiebeVonRechts-NachLinks-Modus (E_{rl}) wechseln,
	8.	$E_{rl}A$	$::=$	AE_{rl}	alle As auf die linke Seite von E_{rl} schaffen,
	9.	$a\#$	$::=$	$\#a$	dann alle as auf die rechte Seite von #
	10.	$AE_{rl}\#$	$::=$	$AM\#$	und sobald man damit fertig ist, in die neue Startsituation wechseln.
Kollaps	11.	AK	$::=$	K	Alle As vernichten.
	12.	$\$K\#$	$::=$	ε	Das $\$$ -Zeichen, das $\#$ -Zeichen und das letzte verbleibende Nichtterminalzeichen K vernichten.

ERSTENS. Das Wort $\$A^{2n-1}M\#a^{(n^2)}$ ist aus S ableitbar für alle $n > 0$.

Beweisskizze. (Induktion über n)

Induktionsanfang. $S \rightarrow \$A^{2 \cdot 1 - 1}M\#a^{(1^2)} = \$AM\#a$

Induktionshypothese. $S \Rightarrow \$A^{2n-1}M\#a^{(n^2)}$

Induktionsschritt.

S	\Rightarrow	$\$A^{2n-1}M\#a^{(n^2)}$	(Induktionshypothese)
	\Rightarrow	$\$A^{2n+1}E_{lr}\#a^{(n^2)}$	3. und 4.
	\Rightarrow	$\$E_{lr}A^{2n+1}a^{2n+1}\#a^{(n^2)}$	5. und 6.
	\rightarrow	$\$E_{rl}A^{2n+1}a^{2n+1}\#a^{(n^2)}$	7.
	\Rightarrow	$\$A^{2n+1}E_{rl}\#a^{(n+1)^2}$	8. und 9.
	\rightarrow	$\$A^{2n+1}M\#a^{(n+1)^2}$	10.
		$= \$A^{2(n+1)-1}M\#a^{(n+1)^2}$	

(Es sind auch andere Ableitungen von $\$A^{2n-1}M\#a^{(n^2)}$ nach $\$A^{2(n+1)-1}M\#a^{(n+1)^2}$ möglich.)

ZWEITENS. Aus $\$A^{2n-1}M\#a^{(n^2)}$ erhält man durch Anwendung der Produktionen 2, 11 und 12 das Terminalwort $a^{(n^2)}$.

DRITTENS. Wenn ein Terminalwort a^k ableitbar ist, dann ist k eine Quadratzahl. Begründung: Eine Satzform, die ein M enthält – und die braucht man zum Terminalisieren – ist immer von der Form $\$A^{2n-1}M\#a^{(n^2)}$ (ohne Beweis).