



Übungsblatt 1 – Lösungsvorschläge

20.10.2001

Aufgabe 1 Grammatiken

(Käufel)

Geben Sie Grammatiken mit den Terminalzeichen $T = \{0, 1\}$ an, die

- a) alle Wörter über T mit einer geraden Anzahl von 1 erzeugen und
- b) die alle Wörter über T erzeugen, die als Dualzahl aufgefaßt, durch 2 teilbar sind.

Beweisen Sie, daß jedes von Ihrer Grammatik erzeugte Terminalwort als Dualzahl aufgefaßt durch 2 teilbar ist.

Zeigen Sie, daß die von Ihnen gefundenen Grammatiken die angegebenen Sprachen erzeugen.

- a) Die Grammatik habe die Nichtterminalzeichen $N = \{S, G, U\}$, die Terminalzeichen $T = \{0, 1\}$ und das Startzeichen S .

Produktionen: $S ::= GG \mid U \mid \varepsilon$, $G ::= 1 \mid 0G \mid G0 \mid GGG$, $U ::= 0 \mid 0U$:

Sei L die Menge der Worte mit einer geraden Anzahl von 1 und $L(G)$ die erzeugte Sprache. Man weist leicht nach (Induktion über die Ableitungslänge): Wenn $S \Rightarrow w$, w nicht terminal, dann enthält w höchstens G oder U .

1. $L(G) \subseteq L$

Durch Induktion über die Ableitungslänge zeigen wir die Aussagen:

Wenn $GG \Rightarrow w$ ($\in V^*$), dann ist die Anzahl der Vorkommnisse von 1 und G in w geradzahlig, und als Nichtterminalzeichen kann höchstens G in w auftreten.

Wenn $U \Rightarrow w$ ($\in V^*$), dann ist $w = xU$ oder $w = x$ mit $x \in \{0\}^*$.

Die beiden Aussagen (über Worte aus V^*) sind allgemeiner als die, die wir zeigen wollen. Die zu beweisenden Aussagen werden wir durch Spezialisierung dieser allgemeinen erhalten. Das ist typisch für (tückisch bei) viele Problemstellungen aus dem Gebiet der formalen Sprachen.

Zum Nachweis der ersten Aussage.

(i) Die Ableitung hat die Länge 0: Wir haben $GG \Rightarrow GG$ und GG hat unbestreitbar eine gerade Anzahl von Vorkommnissen von 1 und G .

(ii) In der Ableitung $S \Rightarrow w$ mit der Länge $n + 1$ trennen wir den letzten Schritt ab: $GG \Rightarrow w' \rightarrow w$. Nach Induktionsvoraussetzung, die Ableitung von w' hat die Länge n , hat w' die behauptete Form. w kann nur mit Hilfe einer der Produktionen $G ::= 1 \mid 0G \mid G0 \mid GGG$ aus w' abgeleitet werden. Auf Grund der Form der Produktionen hat auch w die behauptete Form.

Jetzt zeigen wir die zweite Aussage

(i) Hat die Ableitung die Länge 0, dann haben wir $U \Rightarrow U$ und U hat die behauptete Form.

(ii) In der Ableitung $U \Rightarrow w$ trennen wir den letzten Schritt ab: $U \Rightarrow w' \rightarrow w$. Nach Induktionsvoraussetzung hat w' die behauptete Form. Es ist sogar $w' = xU$ (sonst wäre keine Produktion mehr anwendbar). Mit Hilfe von $U ::= 0$ erhalten wir $w = x0$ und mit $U ::= 0U$ erhalten wir $w = x0U$.

Jetzt betrachten wir die Ableitung $S \rightarrow w_1 \Rightarrow w$ eines beliebigen Terminalworts. Für den ersten Ableitungsschritt kann eine der Produktionen $S ::= GG \mid U \mid \varepsilon$ benutzt werden. Wurde $S ::= \varepsilon$ verwendet, ist $w_1 = w = \varepsilon$.

Ist die Produktion $S ::= GG$ im ersten Ableitungsschritt benutzt worden, also $w_1 = GG$, dann haben wir die Ableitung $S \rightarrow GG \Rightarrow w$ und mit der ersten Aussage oben folgt, daß w eine gerade Anzahl von 1 enthält.

Ist $S ::= U$ benutzt worden, liegt also die Ableitung $S \rightarrow U \Rightarrow w$ vor, folgt mit der zweiten Aussage oben, daß w eine gerade Anzahl von 1 enthält.

2. $L \subseteq L(G)$

Ist $w = \varepsilon$, dann ist $w \in L(G)$.

Ist $w \in \{0\}^+$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $0^n U \rightarrow w$. Durch Induktion über n zeigen wir $S \Rightarrow 0^n U$.

(i) Aus den Produktionen folgt sofort $S \rightarrow U$.

(ii) Nach Induktionsvoraussetzung gibt es die Ableitung $S \Rightarrow 0^n U$, woraus wir $0^{n+1} U$ mit Hilfe von $U ::= 0U$ ableiten können.

Damit sind alle Wörter aus $\{0\}^+$ ableitbar.

Zum Nachweis, daß alle Wörter w , die mindestens ein 1 enthalten, zu $L(G)$ gehören, zeigen wir:

w ist aus S ableitbar, sofern die Anzahl der Vorkommnisse von 1 und G in w geradzahlig ist. Für den Beweis vereinbaren wir $u_i \in \{0\}^*$ und $X_i \in \{1, G\}$.

(i) Die Anzahl der Vorkommnisse ist 2. Wir müssen vier Fälle unterscheiden.

1. $w = u_1 G u_2 G u_3$. Es gibt die Ableitung

$$S \rightarrow GG \Rightarrow u_1 GG \Rightarrow u_1 G u_2 G \Rightarrow u_1 G u_2 G u_3$$

Dabei können wir die u_i mit Hilfe der Produktionen $G ::= 0G$ bzw. $G ::= G0$ ableiten.¹

2. $w = u_1 1 u_2 G u_3$. Diesen Fall können wir mit Hilfe der Ableitung $u_1 G u_2 G u_3 \rightarrow u_1 1 u_2 G u_3$ auf den ersten zurückführen.,

3. $w = u_1 G u_2 1 u_3$.

Mit Hilfe der Ableitung $u_1 G u_2 G u_3 \rightarrow u_1 G u_2 1 u_3$ erhalten wir wieder Fall 1.

4. $w = u_1 1 u_2 1 u_3$. Die Ableitung $u_1 1 u_2 G u_3 \rightarrow u_1 1 u_2 1 u_3$ erlaubt, diesen Fall auf den zweiten zurückzuführen.

(ii) Die Anzahl der Vorkommnisse ist größer als 2, Wir betrachten die Zerlegung $w = u_1 X_1 u_2 X_2 u_3 X_3 w'$. Es ist zweckmäßig, die Ableitung in der umgekehrten Richtung zu notieren. Wir haben

$$u_1 G u_2 X_2 u_3 X_3 w' \Rightarrow u_1 X_1 u_2 X_2 u_3 X_3 w'$$

1. Hier versteckt sich noch eine Aussage, die auch durch Induktion zu beweisen wäre: Alle Wörter $0^n G$ oder $G 0^n$ mit $n \geq 1$ sind aus G ableitbar.

Diese Ableitung ist echt, wenn $X_1 = 1$. Ebenso erhalten wir die Ableitung

$$u_1Gu_2Gu_3Gw' \Rightarrow u_1Gu_2X_2u_3X_3w'$$

Mit Hilfe der Produktion $G ::= 0G$ erhalten wir die Ableitung

$$u_1GGGw' \Rightarrow u_1Gu_2GGw' \Rightarrow u_1Gu_2Gu_3Gw'$$

und unter Verwendung von $G ::= GGG$

$$u_1Gw' \rightarrow u_1GGGw'$$

Da in w' die Anzahl der Vorkommnisse von 1 und G ungeradzahlig ist, ist sie in u_1Gw' gerade, außerdem ist ihre Anzahl um 2 kleiner als in w . Jetzt folgt mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $S \Rightarrow u_1Gw'$.

Ein Wort $w \in L$, mit mindestens einem Vorkommnis von 1 erfüllt die Voraussetzungen der zuletzt bewiesenen Behauptung und ist damit aus S ableitbar. Also gehört es zu $L(G)$.

b) Nichtterminalzeichen $N = \{S, D\}$, Terminalzeichen $T = \{0, 1\}$, Startzeichen S .

Produktionen: $S ::= 0 \mid 1D$, $D ::= 0 \mid 0D \mid 1D$

Anmerkung. Wir lassen keine führende Nullen zu. (010 gehört nicht zur Sprache.)

Zum Nachweis, daß die von der Grammatiken erzeugten Terminalwörter durch 2 teilbare Dualzahlen sind, beweisen wir

Wenn $S \Rightarrow w$ und $w \in V^*$ wenigstens ein Nichtterminalzeichen enthält, dann gibt es ein $v \in T^*$ so, daß $w = 1vD$.

Beweis durch Induktion über die Länge der Ableitung von w .

(i) Induktionsanfang: $S \Rightarrow w$ hat die Länge 1. Dann ist die Produktion $S ::= 1D$ angewandt worden, also $w = 1D$ ($v = \varepsilon$.)

(ii) Induktionsschritt: $S \Rightarrow w$ hat die Länge $n + 1$. Wir trennen den letzten Ableitungsschritt ab: $S \Rightarrow w' \rightarrow w$. Die Ableitung $S \Rightarrow w'$ hat die Länge n , also nach Induktionsvoraussetzung $w' = 1vD$. Wir untersuchen nun, mit welchen Produktionen $w' \rightarrow w$ möglich ist.

1. $D ::= 0D$: Dann $w = 1v0D$

2. $D ::= 1D$: Dann $w = 1v1D$

In beiden Fällen hat w die behauptete Form. ($D ::= 0$ scheidet aus, da dann $w \in T^*$.)

Die Erzeugung eines Terminalworts aus w ist nur mit Hilfe von $D ::= 0$ möglich. Also $w \rightarrow 1v0$ und diese Zeichenfolge ist als Dualzahl angesehen, durch 2 teilbar. Schließlich haben wir noch die Produktion $S ::= 0$, die das Terminalwort 0 abzuleiten erlaubt, was ebenfalls eine gerade Zahl ist.

Zum Nachweis, daß die Grammatik nur die geraden Dualzahlen abzuleiten erlaubt, zeigen wir durch Induktion über die Länge von w :

$S \Rightarrow 1wD$, wobei $w \in T^*$

(i) $w = \varepsilon$: $1D$ ist mit Hilfe der Produktion $S ::= 1D$ aus S ableitbar.

(ii) Wir betrachten $1wvD$, wobei $v \in T$, wobei w aus n Zeichen besteht. Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir $S \Rightarrow 1wD$. Ist $v = 0$, dann erlaubt $D ::= 0D$ die Ableitung von $1w0D$, im anderen Fall erlaubt $D ::= 1D$ die Ableitung von $1w1D$.

Ist ein beliebiges Wort $w \in T^*$ gegeben, betrachten wir zuerst den Fall $w = \varepsilon$. $S ::= 0$ erlaubt 0 abzuleiten. Ist $w \in T^+$, dann gibt es die Ableitung $wD \rightarrow w1$. Da wir keine führenden Nullen zulassen ist $w = 1w'$ und mit der eben bewiesenen Aussage folgt $S \Rightarrow 1w'D$.

Also ist jedes Wort der Sprache mit Hilfe der Grammatik ableitbar.

Aufgabe 2

(Käufel)

Ist die Ableitbarkeitsrelation „ \Rightarrow “ eine Äquivalenzrelation? Ist sie eine Ordnung?

\Rightarrow ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch. (Aus $u \Rightarrow w$ folgt nicht $w \Rightarrow u$.) Also ist \Rightarrow keine Äquivalenzrelation.

\Rightarrow ist nicht antisymmetrisch. (Aus $u \Rightarrow w$ und $w \Rightarrow u$ folgt nicht $u = w$.) \Rightarrow ist keine Ordnung.

Zur Terminologie. Ordnungen müssen nicht total sein, wie es bei der Kleinergleich-Ordnung auf den Zahlen der Fall ist. Solche Ordnungen nennt man, wenn die Unterscheidung notwendig ist, total, linear oder Kette. Die Teilbarkeit auf den natürlichen Zahlen ist eine (nicht totale bzw. partielle) Ordnung. Relationen wie die Ableitbarkeit nennt man bisweilen Quasiordnungen. (Naja, wir könnten auch demotisch lernen, um auch für Nebensächliches Bezeichnungen einzuführen.)