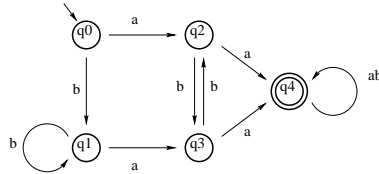


Äquivalenzklassenautomat

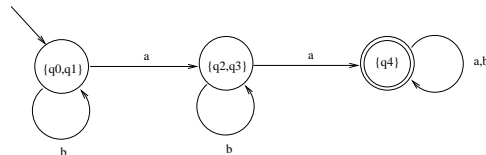
Der Äquivalenzklassenautomat zu einem DEA (als Beispiel wird der DEA aus Aufgabe 1 vom 3. Übungsblatt verwendet) soll konstruiert werden:



1. Das Verfahren aus der Vorlesung (siehe Skript nach Satz 2.23) unterteilt die Zustandsmenge nach und nach in Klassen. Am Anfang hat man alle Zustände in einer Klasse. Das Verfahren betrachtet dann die Wörter aus Σ^* der Länge nach, also hier im ersten Schritt ϵ , im zweiten Schritt a, b , im dritten Schritt aa, ab, ba, bb , usw. Für jedes dieser Wörter (sei w das betrachtete Wort) wird dann nach und nach jede der Klassen betrachtet die es im dem Moment gibt (sei K eine dieser Klassen). K wird dann in zwei Klassen K' und K'' unterteilt, wobei K' die Zustände enthält, die von w in einen Endzustand überführt werden, und K'' die Zustände, die von w in Nicht-Zustände überführt werden. Möglicherweise ist K' oder K'' leer, dann sagen wir, dass K von w nicht getrennt wird. So erhalten wir nach und nach mehr Klassen von Zuständen. Das Verfahren endet sobald für eine Wortlänge l keine der Klassen mehr getrennt werden. Die Klassen, die man dann bestimmt hat, sind genau die gesuchten Klassen äquivalenter Zustände. Das Verfahren angewendet auf das obige Beispiel sieht dann folgendermaßen aus. Am Anfang haben wir eine Klasse $A_1 = Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ mit allen Zuständen. Dann betrachten wir

- (0) das Wort der Länge null:
 - ϵ trennt A_1 in $B_1 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ und $B_2 = \{q_4\}$.
- (1) Wörter der Länge eins:
 - a trennt B_1 in $C_1 = \{q_0, q_1\}$ und $C_2 = \{q_2, q_3\}$, B_2 wird nicht getrennt, also $C_3 = B_2$.
 - b trennt nichts, haben also weiterhin Klassen C_1, C_2, C_3 .
- (2) Wörter der Länge zwei:
 - aa trennt nichts, haben also weiterhin Klassen C_1, C_2, C_3 .
 - ab trennt nichts, haben also weiterhin Klassen C_1, C_2, C_3 .
 - ba trennt nichts, haben also weiterhin Klassen C_1, C_2, C_3 .
 - bb trennt nichts, haben also weiterhin Klassen C_1, C_2, C_3 .

Da Wörter der Länge zwei keine Klasse mehr trennen sind $C_1 = \{q_0, q_1\}$, $C_2 = \{q_2, q_3\}$ und $C_3 = \{q_4\}$ die gesuchten Äquivalenzklassen. Der Äquivalenzklassenautomat ist damit:



2. Ein alternatives Verfahren zum Bestimmen des Äquivalenzklassenautomaten ist im Skriptum Informatik III von Prof. Hartmut Prautzsch aus dem WS 2002/2003 beschrieben (Seite 17/18):

2. Die Paare $(p, q) \in F \times \overline{F} \cup \overline{F} \times F$ sind nicht verschmelzbar und werden markiert.
3. Markiere alle Paare von Zuständen (p, q) für die gilt:

$$\exists a \in \Sigma : (\delta(p, a), \delta(q, a)) \text{ ist markiert.}$$

4. Wiederhole (3) bis keine Markierungen mehr hinzukommen.
5. Verschmelze die unmarkierten Paare.

Im oben genannten Skriptum ist die Konstruktion des Äquivalenzautomaten als Teil der Konstruktion eines Minimalautomaten beschrieben, dort gibt es noch einen Schritt 1, in dem zuerst die nicht erreichbaren Zustände entfernt werden. Die genannten Markierungen kann man in einer Matrix (der Teil unterhalb der Diagonalen genügt) notieren. In unserem konkreten Fall würde Schritt (3) zwei mal ausgeführt, beim zweiten mal kommen schon keine Markierungen mehr hinzu. In der folgenden Matrix repräsentiert \times Markierungen aus Schritt (2) und $+$ Markierungen aus dem ersten Durchlauf durch Schritt (3):

q1				
q2	+	+		
q3	+	+		
q4	×	×	×	×
	q0	q1	q2	q3

Die Äquivalenzklassen findet man nun, indem man ausgeht von einer Klasse pro Zustand, also $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}$, und dann nacheinander die nicht markierten Paare (p, q) abarbeitet und die zugehörigen Klassen, in denen sich p und q befinden, verschmelzt: Betrachte (q_0, q_1) und verschmelze also $\{q_0\}$ und $\{q_1\}$ zu $\{q_0, q_1\}$. Danach betrachte (q_2, q_3) und verschmelze $\{q_2\}$ und $\{q_3\}$ zu $\{q_2, q_3\}$. Schließlich erhalten wir wie im vorherigen Verfahren die Äquivalenzklassen

$$\{q_0, q_1\}, \{q_2, q_3\}, \{q_4\}.$$

Bemerkung zur Korrektheit. Auch dieses Verfahren betrachtet im Prinzip mögliche Zeugen (also Wörter, die belegen, dass zwei Zustände nicht äquivalent sind) der Länge nach. In Schritt (2) wird hier wie im vorigen Verfahren das leere Wort betrachtet, das Zeuge dafür ist, dass Endzustände nicht äquivalent zu Nicht-Endzuständen sind. Im ersten Durchlauf von Schritt (3) werden alle Wörter der Länge eins betrachtet, und im i -ten Durchlauf von Schritt (3) Zeugen der Länge i gesucht, denn hier werden zwei Zustände p und q als nicht äquivalent markiert, wenn es ein $a \in \Sigma$ gibt, so dass $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ (im Schritt $i - 1$ davor) als nicht äquivalent markiert wurden. Im Schritt davor war also ein Zeuge w' (der Länge $i - 1$) bekannt. Damit ist $w := aw'$ ein Zeuge der Länge i für die Nichtäquivalenz von p und q . Wird im k -ten Durchlauf von Schritt (3) kein Zustandpaar mehr markiert, bedeutet dies, dass kein Zeuge der Länge k gefunden wurde und wie im vorigen Verfahren kann an der Stelle abgebrochen werden. Alle bis dahin noch nicht markierten Zustandspaare sind äquivalent.