

Entscheidbarkeit

Nichtentscheidbare Probleme

Welche von denen gehören zu den **Semientscheidbaren**?

- Diagonalsprache $L_d := \{\omega_i : M_i \text{ akzeptiert } \omega_i \text{ nicht}\}$
- Kontextfreie Sprachen: $L(G_1) \subseteq L(G_2)?$, Mehrdeutigkeit (mehrere Ableitungen zum gleichen Wort)?, $L(G)$ kontextfrei?, $L(G)$ regulär?, $L(G)$ det. kontextfrei?
- Diophantische Gleichungen: multivariates Polynome p , Koeffizienten ganzzahlig: $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} : p(x_1, \dots, x_n) = 0?$

• *siehe semientsch. Probleme*

Semientscheidbare Probleme

Definition: Es ex. eine TM, die genau die Wörter aus L akzeptiert, sonst aber nicht halten muss.

Beispiele:

- Halteproblem $H := \{wv | T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}$
- Universelle Sprache $L_u := \{wv | v \in L(T_w)\}$
- Postsches Korrespondenzproblem Geg: Menge von Wortpaaren $(x_i, y_i) \in (\Sigma^+ \times \Sigma^+)^*$. Gibt es eine endl. Folge von Indizes: $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}?$
- Komplement der Diagonalsprache

Entscheidbare Probleme

Definition: Es ex. eine TM, die genau die Wörter aus L akzeptiert und bei jeder Eingabe hält.

Beispiele:

Presburger Arithmetik: eingeschränkte prädikatenlogische Formeln.

| Typ | \in | \emptyset | $=$ | $\cap = \emptyset$ |
|---------|-------|-------------|-----|--------------------|
| CH-3 | J | J | J | J |
| Det. KF | J | J | J | N |
| CH-2 | J | J | N | N |
| CH-1 | J | N | N | N |
| CH-0 | N | N | N | N |

$\mathcal{NP} \stackrel{?}{=} \mathcal{P}$

Definitionen $\mathcal{NP}, \mathcal{P}$

- $\text{time}_M(w) :=$ Anzahl Rechenschritte einer TM M bei Eingabe w
- $\text{TIME}(f(n)) := \{L \in \Sigma^* : \exists TM M : L(M) = L \text{ und } \forall w \in L(M) : \text{time}_M(w) \leq f(|w|)\}$
- $\mathcal{P} := \cup_{\text{Polynom } p} \text{TIME}(p(n))$
- $\text{ntime}_M(w) = \begin{cases} \min\{n : P = (s)w \Rightarrow^n u(f)v, \\ f \in F\} \text{ falls } w \in L(M) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$
- $\text{NTIME}(f(n)) = \{L \in \Sigma^* : \exists \text{NTM } M : L(M) = L \text{ und } \forall w \in L(M) : \text{ntime}_M(w) \leq f(|w|)\}$
- $\mathcal{NP} = \cup_{\text{Polynom } p} \text{NTIME}(p(n))$
- $V \in \mathcal{NP}$ -hart $\Leftrightarrow \forall V' \in \mathcal{NP} : V' \leq_p V$
- $V \in \mathcal{NP}$ -vollständig $\Leftrightarrow V \in \mathcal{NP} \cap \mathcal{NP}$ -hart

Probleme siehe Tabelle Achtung: „Rucksack“ ist Knapsack bei Sanders, aber Subsetsum bei Schöning.

Grammatiken

Sei $G = (V, \Sigma, P, S), \forall l \rightarrow r \in P :$

Def. CH-0 (rekursiv aufzählbar) beliebig

Wortproblemmplexität: semientscheidbar

Definition CH-1 (längenbeschr.)

$|l| \leq |r|$. Sonderregel für ϵ -Produktion nur bei S

Beispiel: $a^n b^n c^n$

Wortproblemmplexität:

$|\Sigma|^{O(n)}$, NP-hart **Entscheidbare Probleme:** $L(G) = \emptyset, |L(G)| \neq \infty, L(G) = \Sigma^*$

Definition CH-2 (kontextfrei)

CH-1 und $l \in V$

Beispiel: $a^n b^n$

Wortproblemmplexität: $O(n^3)$

Pumpinglemma: L kontextfrei

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L, |z| > n :$

$\exists u, v, w, x, y : z = uvwx \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i w x^i y \in L$

Odgens Lemma: L kontextfrei

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L, |z| \geq n :$ Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren

$\exists u, v, w, x, y : z = uvwxy$, dass von den mindestens n markierten Buchstaben mindestens einer zu vx gehört und höchstens n zu wvx gehören und $\forall i \geq 0 : uv^i w x^i y \in L$.

Chomsky-Normalform: falls gilt:

$P \subseteq (V \times \Sigma) \cup (V \times VV)$

1. Terminale in eigene Regeln.
2. Regeln mit rechts > 2 Nicht-Terminale aufsplitten
3. ϵ -Produktionen entfernen
4. Kettenproduktionen entfernen

Definition Det. KF

Bitte noch eintragen

Wortproblemmplexität: $O(n)$

Definition CH-3 (regulär)

CH-2 und $r \in \Sigma \cup \Sigma V$

Beispiel: $a^* b^*$

Wortproblemmplexität: $O(n)$

Pumpinglemma: L regulär

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L, |w| > n :$

$\exists u, v, x : w = uvx \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L$

Reguläre Ausdrücke:

Beispiel: $(\emptyset \cup \epsilon)^* abc^+$

Nerode-Relation

Für Sprache L :

$R_L := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Für Autom. M : $R_M := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \delta^*(s, x) = \delta^*(s, y)\}$

Verfeinerung: R verfeinert

$R' \Leftrightarrow R \subseteq R'$

Satz: L regulär $\Leftrightarrow \text{index}(R_L) \neq \infty$

Satz: $q \neq r \Leftrightarrow \exists z \in \Sigma^* : \delta(q, z) \in F \neq \delta(r, z) \in F$

Beispielanwendung: $a^n b^n$ ist nicht regulär, denn $[a^n], n \in \mathbb{N}$ sind unendlich verschiedene Äquivalenzklassen, denn für $i \neq j$ ist $a^i b^i \in L$, aber $a^j b^i \notin L$, also $[a^i] \neq [a^j]$.

Abschlusseigenschaften

| Typ | \cap | \cup | \cdot | $*$ |
|----------|--------|--------|---------|-----|
| CH-3 | J | J | J | J |
| Det. KF | N | N | J | N |
| CH-2 | N | J | N | J |
| CH-1 | J | J | J | J |
| CH-0 | J | J | N | J |
| semient. | J | J | N | J |
| entsch. | J | J | J | J |

Automaten-Zuordnung

| Typ | Automat |
|---------|--------------------------------|
| CH-3 | Endlicher Automat (NEA, DEA) |
| Det. KF | det. Kellerautomat (DKellerA) |
| CH-2 | Kellerautomat (NKellerA) |
| CH-1 | linear beschr. Automat (NLBTM) |
| CH-0 | Turingmaschine (TM) |

Automatenäquivalenz

ϵ NEA ist zu $\bar{\epsilon}$ NEA ist zu DEA und NTM ist zur DTM äquivalent.

NKellerA ist zu DKellerA nicht äquivalent. Äquivalenz von NLBTM und DLBTM ist noch nicht bewiesen.

Automaten

Mealy-Automat: Ausgabe beim Übergang, Moore-Automat: Ausgabe beim Zustand.

DTM

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F), \delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$

sie hält in $q(av)$:

$\Leftrightarrow \delta(q, a) = (q, a, N)$.

Konvention:

$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q, a) = (q, a, N)$
sie akzeptiert w : $\Leftrightarrow (s)w$ hält nach endlich vielen Übergängen in $x(f)y, f \in F$. y ist die Ausgabe.

rekursiv aufzählbar

(**semientscheidbar**): $\exists T : T$

akzeptiert L

rekursiv (entscheidbar): $\exists T : T$

akzeptiert $L \wedge \forall w \in \Sigma^* : T$ hält.

DTM-Varianten

Mehrere Bänder, mehrere Köpfe, mehrere Dimensionen – alles gleich mächtig wie DTM.

NTM

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F), \delta : Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}}$

sie hält wie: DTM

sie akzeptiert w : $\Leftrightarrow \exists$ Folge von Konfigurationen

$s(w) \rightarrow \dots \rightarrow x(f)y, f \in F$

Gödelnummer-Code

1. Kodiere δ :

$\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t) \rightarrow$

$0^i 10^j 10^r 10^s 10^t$

wobei

$d_t \in \{d_1 = L, d_2 = R, d_3 = N\}$

2. Die TM wird dann kodiert durch:

$111u_1 11u_2 11\dots 11u_n 111$

mit u_i die möglichen Übergänge in bel. Reihenfolge.

NLBTM

NTM $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F) : \forall a =$

$a_1, \dots, a_n \in \Sigma^+ : a \xrightarrow{\delta} \alpha(q)\beta$ mit

$|\alpha\beta| < n$

Nichtdet. Kellerautomat

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#), \delta :$

$Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

er akzeptiert w : $\Leftrightarrow \exists$ Folge von Konfigurationen

$(s, w, \#) \rightarrow \dots \rightarrow (q, \epsilon, \epsilon), q \in Q$

beliebig.

Det. Kellerautomat

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#), \delta :$

$Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ mit

$\forall q \in Q, a \in \Sigma, A \in \Gamma :$

$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \epsilon, A)| \leq 1$

er akzeptiert w : $\Leftrightarrow \exists$ Folge von Konfigurationen

$(s, w, \#) \rightarrow \dots \rightarrow (f, \epsilon, \epsilon), f \in F$

Automatenminimierung

(Für endliche Automaten)

1. nicht erreichbare Zustände weg

2. Tabelle aller Zustandspaare

$\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$

(z_1 bis z_k links, z_0 bis z_{k-1} unten)

3. Markieren der Zustandspaare mit $z \in F$ und $z \notin F$ oder umgekehrt.

4. Betrachte unmarkierte Paare $\{z, z'\}$.

Wenn $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ für mind. ein $a \in \Sigma$ bereits markiert, markiere $\{z, z'\}$.

5. Wiederhole 4. bis keine Änderung mehr.

6. Unmarkierte Paare können verschmolzen werden.

DEA \rightarrow reg. ex.

Betrachte $L_{ij}^m := \{w : \Sigma^* :$

Beim Verarbeiten von w geht A vom Zustand i nach j und dabei höchstens durch m .

Es gilt $L_{ij}^{m+1} = L_{ij} \cup$

$(L_{i, m+1}^m (L_{m+1, m+1}^m)^* L_{m+1, j}^m)$

So weitermachen, bis man L_{sf}^n hat

(s Startzustand, f Endzustand, n Zahl der Zustände).

NEA \rightarrow DEA

Potenzmengenkonstruktion.

Knotenmengen sind Endzustände, wenn einer ihrer enthaltenen Zustände ein Endzustand ist.

Whileprogramm

\mathbb{N} main($\mathbb{N}x_1, \dots, x_k$) {

$\mathbb{N}x_0 = 0; \mathbb{N}x_{k+1} = 0; \dots$

body;

return x_0 ;

}

body $\in \{ \text{Sequenz } ;, \text{while}(x_i \neq 0) :$
 Schleife, $x_i := x_i + c$ wobei $c \in \{-1, 0, 1\}$ und $0 - 1 := 0\}$
 „loop“-Konstrukte im body erlaubt, aber redundant.

Loopprogramm

\mathbb{N} main($\mathbb{N}x_1, \dots, x_k$) {

$\mathbb{N}x_0 = 0; \mathbb{N}x_{k+1} = 0; \dots$

body;

return x_0 ;

}

body $\in \{ \text{Sequenz } ;, \text{loop}(x_i) :$

Schleife, wobei schon vor dem

Durchlauf bekannt ist wie oft die

Schleife wiederholt wird, $x_i := x_i + c$

wobei $c \in \{-1, 0, 1\}$ und $0 - 1 := 0\}$

Ackermannfunktion

Definition

Function $a(x, y)$

if $x = 0$ then return $y + 1$

if $y = 0$ then return $a(x - 1, 1)$

return $a(x - 1, a(x, y - 1))$

Eigenschaften

• \forall Loopprogramm

$P : \exists k : \forall n \in \mathbb{N} : f_P(n) < a(k, n)$

• $y < a(x, y)$

• $a(x, y) < a(x, y + 1)$

• $a(x, y + 1) < a(x + 1, y)$

• $a(x, y) < a(x + 1, y)$

• $a(x, y) \leq a(x', y')$ falls $x \leq x'$ und $y \leq y'$

Pseudopolynomialität

Nur relevant für Probleme mit Zahlen

Approximation

\mathcal{A} ein polynomieller

Approximationsalgo, OPT

Optimalwert:

absoluter Approxalgo

$\forall I$ Instanzen eines

Optimierungsproblems

$\exists K : \text{OPT}(I) - \mathcal{A}(I) \leq K$

Approxalgo relativer Güte

$\forall I \text{ Instanz } \exists K : \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq K, K \geq 1$

konstant.

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$

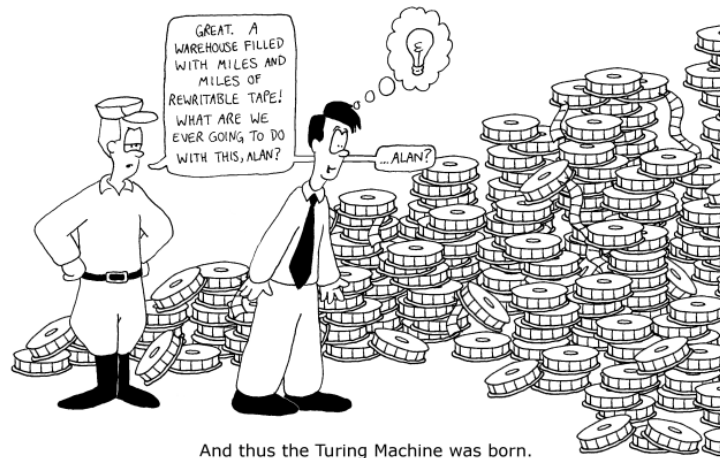
$\begin{cases} \frac{\mathcal{A}(I)}{\text{OPT}(I)} \text{ falls Minimierungspr.} \\ \frac{\text{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} \text{ falls Maximierungspr.} \end{cases}$

!!! Formulierungen anpassen

PAS – Approxschema

NP-Vollständige Probleme

| Problem | Gegeben | Gesucht | polyn. red. von |
|------------------------|--|---|------------------------|
| SAT | aussagenlog. Formel | Erfüllbarkeit | TM |
| 3SAT | boolesche Formel in KNF mit 3 Lit. pro Klausel | Erfüllbarkeit | SAT |
| Set Cover | endl. Menge M und $T_1, \dots, T_k \subseteq M$, Zahl $n \leq k$ | n Mengen T_1, \dots, T_n mit $M = \cup_{j=1 \dots n} T_{i_j}$ | 3SAT |
| Steiner-Tree | Unger. Graph $G = (V, E)$ mit Gewichten $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, $V = R$ (Pflicht-) $\cup F$ (Steinerknoten) | Baum $T \subseteq E$ der mit minimalen Kosten alle Pflichtknoten verbindet | 3SAT |
| Clique | ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$ | Clique $V' \subseteq V$ mit $ V' \geq k$, also $\forall i, j \in V', i \neq j$, gilt: $\{i, j\} \in E$ | 3SAT |
| Vertex Cover | ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$ | überdeckende Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $ V' \geq k$, sodass $\forall \{u, v\} \in E: u \in V'$ oder $v \in V'$ | Clique |
| Subset Sum | Zahlen $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ und $W \in \mathbb{N}$ | Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = W$ | 3SAT |
| Partition | Zahlen $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ | Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$ | Subset Sum |
| Bin Packing | Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, Behälteranzahl $k \in \mathbb{N}$, Objekte $a_1, \dots, a_k \leq b$ | Abb. $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, sodass $\forall j = 1, \dots, k: \sum_{f(i)=j} a_i \leq b$ | Partition |
| Knapsack | endl. Menge M , Gewichsfkt. $w: M \rightarrow \mathbb{N}_0$, Kostenfkt. (Profittfkt.) $c: M \rightarrow \mathbb{N}_0$, $W, C \in \mathbb{N}_0$ | $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) \leq W$ und $\sum_{a \in M'} c(a) \geq C$ | Subset Sum |
| ILP | Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ und Bedingungen $a \cdot x R b$ mit $R \in \{\leq, \geq, =\}$, $a \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$ | Gibt es eine Belegung von x , so dass alle Bedingungen erfüllt sind? | Subset Sum |
| Gericht. Hamiltonkreis | gerichteter Graph $G = (V, E)$ | Hamiltonkreis: einfacher Kreis der jeden Knoten genau einmal enthält | 3SAT |
| Hamiltonkreis | ungerichteter Graph $G = (V, E)$ | Hamiltonkreis | Gericht. Hamiltonkreis |
| TSP | Vollständiger Graph $G = (V, V \times V)$ mit Abstands fkt. $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ und Zahl k | Hamiltonkreis C mit Länge $\sum_{(u,v) \in C} d(u,v) \leq k$ | Hamiltonkreis |
| Coloring | ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$ | $c: V \rightarrow 1, \dots, k$ mit $\forall \{u, v\} \in E: c(u) \neq c(v)$ | 3SAT |



And thus the Turing Machine was born.

Und für die, die den Taschenrechner vergessen haben:



Jetzt sogar mit Glückspfennig!