Name: Lösungsvorschlag Matrikelnummer:

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	**falsch**
1.	Zu jeder endlichen Sprache L gibt es eine Chomsky-Grammatik G vom Typ 3 mit $L = L(G)$.	✔	
2.	Die Vereinigung kontextfreier Sprachen ist kontextfrei.	✔	
3.	Die Ableitbarkeitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.		✔
4.	Die Menge $\{i \in Nat \mid \varphi_i^{(1)} \text{ ist total}\}$ ist aufzählbar		✔
5.	Der Schnitt aufzählbarer Mengen ist aufzählbar.	✔	
6.	Jede aufzählbare Menge ist auch entscheidbar.		✔
7.	Jede Teilmenge einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar.		✔
8.	Für beliebige Alphabete A und B ist $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$.		✔
9.	Wenn $uw \to uz$, dann $w \to z$.		✔
10.	Wenn $w \to z$, dann $uw \to uz$.	✔	

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	**falsch**
1.	Die Sprache $\{a^n b^n c^n : n \in Nat\}$ ist regulär.		×
2.	Mit der Teilmengenkonstruktion bestimmt man den zustandsminimalen Quotientenakzeptor eines Akzeptors.		×
3.	Die Ackermannfunktion ist primitiv rekursiv.		×
4.	Es gibt loop-Programme, die nicht terminieren.		×
5.	Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch von einem loop-Programm berechenbar.		×
6.	Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter der Komplementbildung.		×
7.	Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement aufzählbar.	×	
8.	Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter der Komplementbildung.	×	
9.	Jede reflexive, transitive und symmetrische Relation ist eine Äquivalenzrelation.	×	
10.	Die Ableitbarkeitsrelation ist eine Ordnung.		×

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	**falsch**
1.	Jede Teilmenge einer entscheidbaren Menge ist entscheidbar.		×
2.	Der Schnitt entscheidbarer Mengen ist entscheidbar.	×	
3.	Jede primitiv rekursive Funktion ist total.	×	
4.	Jede totale Funktion ist primitiv rekursiv.		×
5.	Jede Obermenge einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar.		×
6.	Jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nur für endlich viele Argumente einen von Null verschiedenen Wert hat, ist berechenbar.	×	
7.	In einem Bereich $(M, \leq)$ hat jede Kette ein Supremum in M.	×	
8.	Die Sprache $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.		×
9.	Jede von einem endlichen Akzeptor akzeptierte Sprache ist endlich.		×
10.	Das Komplement einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar.		×

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	**falsch**
1.	Eine Satzform enthält nur Terminalzeichen.		×
2.	Zu jeder Sprache L gibt es eine Chomsky-Grammatik G vom Typ 0 mit $L(G) = L$.		×
3.	Die Sprache $\{a^n b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.		×
4.	Die Sprache $\{ww : w \in T^*\}$ mit $T = \{a, b\}$ ist vom Typ 1.	×	
5.	Die leere Menge ist entscheidbar.	×	
6.	Es gibt entscheidbare Mengen, deren Schnitt nicht aufzählbar ist.		×
7.	Wenn (a, b) und (a, c) zu einer Äquivalenzrelation gehören, dann auch (b, c).	×	
8.	Ein Bereich hat ein kleinstes Element.	×	
9.	Jede stetige Funktion ist monoton. (*)	×	
10.	Jede stetige Funktion hat Fixpunkte. (*)	×	

(*) Bitte beachten Sie, daß bei Aussage 9 und 10 der Stetigkeitsbegriff der Vorlesung „Informatik III" gemeint ist.

Aufgabe 5: (12x1=12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Aussage		Wahr	Falsch
Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen. Dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.	*Lösung:*	X	
Die regulären Ausdrücke $(a^*b^*)^*$ und $(a^*b)^*$ sind äquivalent.	*Lösung:*		X
Jede Turingmaschine mit zwei Bändern kann durch eine Turingmaschine mit einem Band simuliert werden.	*Lösung:*	X	
Jeder Kellerautomat mit zwei Stacks kann durch einen Kellerautomat mit einem Stack simuliert werden.	*Lösung:*		X
Sei L_1 semientscheidbar und L_2 entscheidbar. Dann ist $L_1 \cap L_2$ immer entscheidbar.	*Lösung:*		X
Σ^* und $\emptyset$ sind $\mathcal{NP}$-vollständig.	*Lösung:*		X
Für jede Sprache L gilt: Aus $L \in \mathcal{P}$ folgt $L^C \in \mathcal{P}$.	*Lösung:*	X	
Für jedes Optimierungsproblem Π gilt: Es gibt für Π einen Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 wenn es ein PAS für Π gibt.	*Lösung:*	X	
Das KNAPSACK-Problem, eingeschränkt auf Kosten aus $\{0,1\}$ und Gewichte aus $\{3,5,7\}$ ist in $\mathcal{P}$.	*Lösung:*	X	
Sei Σ ein endliches Alphabet. Dann ist Σ^* kontextfrei.	*Lösung:*	X	
Es existiert ein NEA, der die Sprache aller Java-Programme erkennt.	*Lösung:*		X
Wenn für eine Sprache L gilt: $\exists n \in I\!N : \forall w \in L, \lvert w\rvert > n : \exists$ Zerlegung $w = uvx, \lvert uv\rvert \leq n, v \neq \varepsilon : \forall i \in I\!N_0 : uv^ix \in L$, dann ist L regulär.	*Lösung:*		X

Aufgabe 5: (13x1=13 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
Dann ist auch $L_1 \setminus L_2 = \{w \in L_1 | \ w \notin L_2\}$ regulär.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☒ Wahr ☐ Falsch

Die regulären Ausdrücke $a(b^* \cup c^*)$ und $a(b \cup c)^*$ sind äquivalent.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☐ Wahr ☒ Falsch

Das Komplement der universellen Sprache ist nicht semientscheidbar.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☒ Wahr ☐ Falsch

Seien L_1 und L_2 zwei semientscheidbare Sprachen. Dann ist auch
$L_1 \setminus L_2 = \{w \in L_1 | \ w \notin L_2\}$ semientscheidbar.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☐ Wahr ☒ Falsch

Sei $L \subset \{0, 1\}^*$ nicht entscheidbar. Dann gilt: Der Index der Neroderelation zu L ist unendlich.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☒ Wahr ☐ Falsch

Aus 3SAT $\in \mathcal{P}$ folgt 2SAT $\in \mathcal{NPC}$.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☒ Wahr ☐ Falsch

Falls es einen Approximationsalgorithmus für CLIQUE mit absoluter Gütegarantie gibt, so gilt $P = NP$

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☒ Wahr ☐ Falsch

Es gibt ein Entscheidungsproblem $\Pi \in \mathcal{NP}$, für das es keine polynomiale Transformation $\Pi \propto SAT$ gibt.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: ☐ Wahr ☒ Falsch

Sei k eine Konstante. Die Sprache $\mathrm{VC}_k := \{G |\ G = (V, E)$ ist ein Graph und hat eine Knotenüberdeckung $V' \subset V$ mit $|V| \leq k\}$ ist in $\mathcal{P}$.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung:

☒ Wahr ☐ Falsch

Zu jeder entscheidbaren Sprache L existiert eine Chomsky-Typ-0-Grammatik, die L erzeugt.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung:

☒ Wahr ☐ Falsch

Jede Sprache der Form $\{x_1^n x_2^n \dots x_k^n \colon n \in I\!N\}$ ist kontextfrei. (Dabei sei $k \geq 1$ und die x_i jeweils Buchstaben aus einem endlichen Alphabet mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.)

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung:

☐ Wahr ☒ Falsch

Zu jedem nichtdeterministischen Kellerautomat gibt es einen deterministischen Kellerautomaten, der dieselbe Sprache akzeptiert.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung:

☐ Wahr ☒ Falsch

Die Grammatik, die nur aus der Regel $S \to \varepsilon$ besteht, erzeugt dieselbe Sprache wie eine Grammatik ohne Regeln.

☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung:

☐ Wahr ☒ Falsch

Aufgabe 5: (12 Punkte)

	Wahr	Falsch
Jede endliche Sprache ist regulär.	X	
Falls $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, so ist 2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig.	X	
Jedes $\mathcal{NP}$-vollständige Problem ist entscheidbar.	X	
Der Index der Nerode-Relation einer endlichen Sprache L ist echt kleiner als die Anzahl der Wörter in L.		X
Alle Sprachen sind semientscheidbar.		X
Die regulären Ausdrücke $b^*(ab^*)^*$ und $(a^* \cup b)^*$ sind äquivalent.	X	
Es gibt eine Sprache, die entscheidbar und semientscheidbar ist.	X	
Zu jeder regulären Sprache gibt es einen PDA, der sie erkennt.	X	
Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.	X	
Das Komplement jeder semientscheidbaren Sprache ist semientscheidbar.		X
MAX3SAT ist $\mathcal{N}P$-vollständig.	X	
Um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, genügt es zu zeigen, dass sie nicht kontextfrei ist.	X	

Aufgabe 5: (12x1=12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe gegeben.

Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten, dessen Startzustand eine Schleife (Übergang auf sich selbst) besitzt, erkannt wird, ist unendlich.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein endlicher Automat. Falls es $p, q \in Q$ gibt, für die für alle $w \in \Sigma^*$ gilt, dass wenn $\delta(p, w) \in F$, dann auch $\delta(q, w) \in F$ ist, so ist $\mathcal{A}$ nicht zustandsminimal.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass falls es ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ gibt, w so in uvx mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ zerlegt werden kann, dass $uv^i x \in L$ ist für mindestens ein $i \in \mathbb{N}_0$.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Sei L eine semientscheidbare Sprache, deren Komplement entscheidbar ist. Dann ist L entscheidbar.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Sei $H_\varepsilon := \{\langle \mathcal{M} \rangle : \text{TM } \mathcal{M} \text{ hält auf Eingabe } \varepsilon\}$, dann ist die charakteristische Funktion von H_ε berechenbar.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Die Sprache $\{wv : v \in L(T_{\overline{w}})\}$ ist entscheidbar, wobei $\overline{w}$ das bitweise Komplement des Wortes w (jede 0 wird durch 1 ersetzt und umgekehrt) bezeichne.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Es existiert eine Transformation 2SAT $\propto$ 3SAT.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Falls CLIQUE $\in$ co$-\mathcal{NP}$, dann gilt $\mathcal{NP} =$ co$-\mathcal{NP}$.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Für KNAPSACK existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, falls n^4 eine obere Schranke für das Gesamtgewicht W ist (wobei n die Anzahl der Objekte sei). ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Sei G eine Typ-k-Grammatik. Dann ist der maximale Chomsky-Typ von $L(G)$ ebenfalls k. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Die Sprache

$$\left[\Big((\{a^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cdot \{c\}) \cup \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}\Big) \cdot \{b^n : n \in \mathbb{N}_0\}\right] \cap \left[\{a^n c b^n : n \in \mathbb{N}_0\}\right]$$

☐ wahr ☐ falsch

ist kontextfrei.

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Mit Grammatiken vom Typ 1 bzw. 2 lassen sich in n Ableitungsschritten nur Wörter der Länge höchstens n erzeugen. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Aufgabe 5: (12 × 1 = 12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe gegeben.

Sei $\mathcal{A}$ ein NEA über einem Alphabet Σ. Dann akzeptiert $\mathcal{A}$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ bei der Abarbeitung von w mindestens einen Endzustand benutzt.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [ ] wahr [X] falsch

Es existiert ein endlicher Automat, der die durch die Grammatik $(\{a,b,c\},\{S,A,B,C\},S,R)$ mit

$$R = \{S \longrightarrow ABC,\ A \longrightarrow C,\ A \longrightarrow AA \mid a,\ B \longrightarrow BB \mid b,\ C \longrightarrow CC \mid c\}$$

erzeugte Sprache erkennt.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [X] wahr [ ] falsch

Die Sprache $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0^{pn} \mid p \text{ prim}\} \subseteq \{0\}^*$ hat endlichen Nerodeindex.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [X] wahr [ ] falsch

Seien f_1 und f_2 turingberechenbare Funktionen und $\mathcal{M}$ eine deterministische Turingmaschine. Dann existiert keine nicht-deterministische Turingmaschine, die entscheidet, ob $\mathcal{M}$ Funktion f_1 oder f_2 berechnet.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [X] wahr [ ] falsch

Sei L eine semientscheidbare Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$. Dann ist $\chi^*_{L\cap L_u}$ berechenbar, wobei L_u die universelle Sprache bezeichne.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [X] wahr [ ] falsch

Sei L eine Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$ und $w \in \{0,1\}^*$. Dann gibt es eine Gödelnummer g so, dass die universelle Turingmaschine die Eingabe (g,w) genau dann akzeptiert, falls $w \in L$.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [ ] wahr [X] falsch

Es gilt: co-2SAT $\notin \mathcal{NP}$.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: [ ] wahr [X] falsch

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann kann mit Hilfe eines Algorithmus für SET COVER eine Instanz von INDEPENDENT SET in polynomieller Gesamtzeit gelöst werden.

[ ] wahr [ ] falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Falls es ein PAS für COLOR gibt, dann ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Jede Sprache, die durch einen nicht-deterministischen endlichen Automaten erkannt wird, kann auch durch einen deterministischen Kellerautomaten erkannt werden. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☒ wahr ☐ falsch

Die Sprache

$$\Big[\big(\{a^ncb^ncd^k : k, n \in \mathbb{N}\} \cap a^*cb^*cd^*\big) \cup a^*cb^*\Big] \cap \Big[a^*c \cdot \{b^ncd^n : n \in \mathbb{N}\}\Big]$$

ist kontextfrei. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Sei G eine kontextfreie Grammatik und α ein regulärer Ausdruck. Es ist nicht entscheidbar, ob $L(G) \cap L(\alpha) = \emptyset$ ist. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung: ☐ wahr ☒ falsch

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	**falsch**
1.	Die Ackermannfunktion wächst schneller als jede durch ein LOOP-Programm berechenbare Funktion.	×	
2.	Ist L in P und L NP-hart, dann ist P = NP.	×	
3.	$S \rightarrow aBb$ ist eine Regel vom Typ 3.		×
4.	Es gibt einen pseudopolynomiellen Algorithmus für das SUBSET-SUM-Problem.	×	
5.	Jede totale Funktion ist LOOP-berechenbar.		×
6.	Kellerautomaten akzeptieren Sprachen des Typs 2.	×	
7.	Komplemente entscheidbarer Mengen sind rekursiv aufzählbar.	×	
8.	Sprachen vom Typ 2 sind unter der Komplementbildung abgeschlossen.		×
9.	Mit der Teilmengenkonstruktion bestimmt man einen minimalen Automaten.		×
10.	Die Anzahl der Äquivalenzklassen einer Nerode-Relation ist stets endlich.		×

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	falsch
1.	Sei L definiert durch eine kontextfreie Grammatik mit dem Alphabet $\{0, 1\}$. Läßt sich in polynomieller Zeit entscheiden, ob es ein Wort w in L mit $\|w\| = 3$ gibt?	×	
2.	Die Ackermannfunktion wächst schneller als jede durch ein While-Programm berechenbare Funktion.		×
3.	$\{a^ib^ic^kd^k\colon i, k \geq 0\} \cap \{a^ib^kc^kd^i\colon i, k \geq 0\}$ ist eine Typ-2-Sprache.		×
4.	$S \to aBb$ ist eine Regel vom Typ 2.	×	
5.	Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.		×
6.	Der Schnitt zweier entscheidbarer Mengen ist entscheidbar.	×	
7.	$\{a^nb^n\colon n \geq 1\}$ ist regulär.		×
8.	Jede durch eine Turingmaschine realisierte Funktion ist loop-berechenbar.		×
9.	Jede Sprache enthält das leere Wort.		×
10.	$\{ww^{\mathrm{R}}\colon w \in \Sigma^*\}$ ist vom Typ 1.	×	