Name

Vorname

Matrikelnummer

Lösungsvorschlag

Universität Karlsruhe
Institut für Theoretische Informatik

o. Prof. Dr. P. Sanders 20. April 2006

Klausur: Informatik III

Aufgabe 1.	Multiple Choice	10 Punkte
Aufgabe 2.	Teilmengenkonstruktion	6 Punkte
Aufgabe 3.	Kontextfreie Sprachen	13 Punkte
Aufgabe 4.	Chomsky-Hierarchie	8 Punkte
Aufgabe 5.	Cocke-Younger-Kasami	7 Punkte
Aufgabe 6.	Komplexitätstheorie	8 Punkte
Aufgabe 7.	Komplexitätstheorie	8 Punkte

Bitte beachten Sie:
– Als Hilfsmittel ist nur ein DIN-A4-Blatt mit Ihren Notizen zugelassen.
– **Schreiben** Sie auf **alle** Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
– Die Klausur enthält 8 Blätter und gilt als bestanden, wenn Sie 20 Punkte erreichen.

Aufgabe		1	2	3	4	5	6	7	Summe
max. Punkte		10	6	13	8	7	8	8	60
Punkte	EK								
	ZK								

Note:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

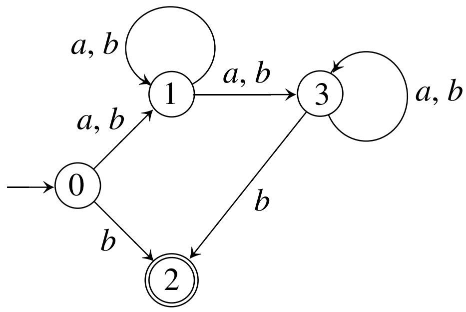
Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	falsch
1.	Sei L definiert durch eine kontextfreie Grammatik mit dem Alphabet $\{0, 1\}$. Läßt sich in polynomieller Zeit entscheiden, ob es ein Wort w in L mit $\lvert w \rvert = 3$ gibt?	×	
2.	Die Ackermannfunktion wächst schneller als jede durch ein While-Programm berechenbare Funktion.		×
3.	$\{a^i b^i c^k d^k : i, k \geq 0\} \cap \{a^i b^k c^k d^i : i, k \geq 0\}$ ist eine Typ-2-Sprache.		×
4.	$S \to aBb$ ist eine Regel vom Typ 2.	×	
5.	Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.		×
6.	Der Schnitt zweier entscheidbarer Mengen ist entscheidbar.	×	
7.	$\{a^n b^n : n \geq 1\}$ ist regulär.		×
8.	Jede durch eine Turingmaschine realisierte Funktion ist loop-berechenbar.		×
9.	Jede Sprache enthält das leere Wort.		×
10.	$\{ww^{\mathrm{R}} : w \in \Sigma^*\}$ ist vom Typ 1.	×	

Lösungsvorschlag

Aufgabe 2. Teilmengenkonstruktion 6 Punkte

Gegeben sei der rechtsstehende nichtdeterministische endliche Akzeptor. Startzustand 0, Endzustand 2. Konstruieren Sie in der untenstehenden Tabelle einen äquivalenten deterministischen Akzeptor. (Teilmengenkonstruktion)
Geben Sie Start- und Endzustände an.



Startzustand 0, Endzustände {1, 2}, {1, 2, 3}

	a	b
0	1	1, 2
1	1, 3	1, 3
1, 2	1, 3	1, 3
1, 3	1, 3	1, 3, 2
1, 2,3	1, 3	1, 3, 2

Lösungsvorschlag

Aufgabe 3. Kontextfreie Sprachen 13 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik mit den Produktionen $S \to aS$, $S \to aB$, $B \to b$, $B \to bB$. Startzeichen S, $V = \{S, B\}$

a. Gehören a^3b^2 und a^3b^3 zur erzeugten Sprache? (Begründung!) [2 Punkte]

b. Zeigen Sie, daß $a^nb^n \in L(G)$ für alle $n \geq 1$. [8 Punkte]

a. $S \Longrightarrow aS \Longrightarrow a^2S \Longrightarrow a^3B \Longrightarrow a^3bB \Longrightarrow a^3b^2$ und $a^3bB \Longrightarrow a^3b^2B \Longrightarrow a^3b^3$

b. Induktion über n: $S \overset{*}{\Longrightarrow} a^nS$ für alle $n \geq 0$

(i) $S \overset{*}{\Longrightarrow} S$

(ii) $S \overset{*}{\Longrightarrow} a^nS \Longrightarrow a^{n+1}S$

Induktion über m: $B \overset{*}{\Longrightarrow} b^mB$ für alle $m \geq 0$

(i) $B \overset{*}{\Longrightarrow} B$

(ii) $B \overset{*}{\Longrightarrow} b^mB \Longrightarrow b^{m+1}B$

$S \overset{*}{\Longrightarrow} a^{n-1}S \Longrightarrow a^nB \overset{*}{\Longrightarrow} a^nb^{n-1}B \Longrightarrow a^nb^n$

c. Geben Sie einen endlichen Akzeptor für die von der Grammatik erzeugte Sprache an. [2 Punkte]

d. Geben Sie eine Akzeption des Wortes a^2b^2 an. [1 Punkt]

c. Bedeutung der Tripel: $(q, v, \delta(q, v))$

$S \to aS$	(S, a, S)	$S \to aB$	(S, a, B)	Startzustand: S, Endzustand: f
$B \to b$	(B, b, f)	$B \to bB$	(B, b, B)	

d. $S \xrightarrow{a} S \xrightarrow{a} S \xrightarrow{b} B \xrightarrow{b} f$

Lösungsvorschlag

Aufgabe 4. Chomsky-Hierarchie 8 Punkte

Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^{2n}b^{3n} \colon n \geq 1\}$.

a. Geben Sie eine Grammatik vom Typ 2 an, die L erzeugt. [2 Punkte]

b. Zeigen Sie, dass L sich *nicht* durch eine Chomsky-Grammatik vom Typ 3 erzeugen läßt. [6 Punkte]

a. $S \to a^2Sb^3$, $S \to a^2b^3$

b. Da die Sprachen des Typs 3 die regulären Sprache sind, verwenden wir das Pumplemma. Sei L regulär und k die Zahl gemäß Pumplemma. Da $|a^{2k}b^{3k}| \geq k$, gibt es eine Zerlegung $a^{2k}b^{3k} = uvw$. Da $|uv| \leq k$, gibt es ein l, sodaß $uv = a^l$. Für $v = a^j$ $(j \geq 1)$ fordert das Pumplemma $a^{2k+j}b^{3k} \in L$. Dies verletzt die definierende Bedingung für L. Also ist L nicht regulär.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 5. Cocke-Younger-Kasami 7 Punkte

Gegeben sei die Typ-2-Grammatik mit den Produktionen $S \to DD$, $D \to CA$, $C \to CB$, $C \to DB$, $C \to a$, $A \to a$, $B \to b$. Startzeichen S, Terminalalphabet $\{a, b\}$.
Bearbeiten Sie mit dem Algorithmus von Cocke-Younger-Kasami die folgenden Fragen

a. Aus welchen Nichtterminalzeichen können die Wörter *abaaa* und *abab* abgeleitet werden?
b. Welches der Wörter *abaaa* und *abab* gehört zur erzeugten Sprache?

a.

a	b	a	a	a		a	b	a	b
A, C	B	A, C	A, C	A, C		A, C	B	A, C	B
C		D	D			C		C	
D						D			
						C			
S									

abaaa ist aus S, *abab* aus C ableitbar.
b. *abaaa* gehört zur Sprache, *abab* nicht

Lösungsvorschlag

Aufgabe 6. Komplexitätstheorie 8 Punkte

MAX CLIQUE sei folgendes Entscheidungsproblem:
Gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$.
Frage: Hat die *größte* Clique in G *genau* die Größe k?

Wir nehmen an, dass P = NP. (Diese Annahme gilt für beide Teilaufgaben.)

a. Zeigen Sie, dass NP = co-NP. [2 Punkte]
b. Zeigen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a, dass das Problem MAX CLIQUE in P liegt. [6 Punkte]

Zur Erinnerung, *Hinweise*
– Eine Clique ist eine Knotenteilmenge $V' \subseteq V$, so dass $\forall u \neq v \in V'$: $\{u, v\} \in E$.
– Beim CLIQUE Problem muss man entscheiden, ob ein gegebener Graph eine Clique einer gegebenen Größe enthält. Bekannt ist, dass CLIQUE $\in$ NP.
– co-NP := $\{L^C: L \subseteq \Sigma^* \wedge L \in \text{NP}\}$
NICHT empfohlen: Der Lösungsansatz, als erstes MAX CLIQUE $\in$ NP zu beweisen, ohne die Annahme P = NP zu verwenden, und daraus MAX CLIQUE $\in$ P mit Hilfe der Annahme zu folgern.

a. Aus P = NP und der Abgeschlossenheit von P bezüglich der Komplementbildung folgt NP = co-NP.
b. Wir testen,
1. ob $(G, k) \in$ CLIQUE und
2. ob $(G, k + 1) \notin$ CLIQUE.
Wenn beides erfüllt ist, wissen wir, dass G eine Clique der Größe k enthält, aber keine Clique der Größe $k + 1$. Letzteres impliziert auch, dass es keine Clique der Größe $k' > k + 1$ geben kann, da jede solche Clique auch eine Clique der Größe $k + 1$ enthielte. Also können wir folgern, dass die größte Clique in G genau die Größe k hat, d. h. es gilt $(G, k) \in$ MAX CLIQUE. Offensichtlich gilt auch $(G, k) \notin$ MAX CLIQUE, wenn 1. oder 2. nicht erfüllt ist.
Bekannt ist, dass CLIQUE $\in$ NP. Also liegt der 1. Test in NP und der 2. in co-NP. Wegen P = NP = co-NP, kann daher das gesamte Verfahren deterministisch in polynomieller Zeit durchgeführt werden. Daraus folgt: MAX CLIQUE $\in$ P.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 7. Komplexitätstheorie 8 Punkte

LONGEST CIRCUIT sei folgendes Entscheidungsproblem:
Gegeben: Eine natürliche Zahl k und ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion w: $E \to \mathbf{N}$.
Frage: Gibt es in G einen einfachen Kreis der Länge $\geq k$, d. h. dessen Kantengewichtssumme mindestens k beträgt?

Zeigen Sie, dass LONGEST CIRCUIT NP-hart ist.

Zur Erinnerung, *Hinweise*:
- Ein *einfacher Kreis* ist ein Kreis, in dem kein Knoten mehr als einmal vorkommt.
- In der Vorlesung wurde das Problem HAMILTONIAN CIRCUIT vorgestellt:
  Gegeben: Ein ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$.
  Frage: Gibt es in G einen einfachen Kreis C mit $|C| = |V|$?

Sie dürfen die Tatsache, dass HAMILTONIAN CIRCUIT NP-hart ist, verwenden.

Wir zeigen, dass LONGEST CIRCUIT NP-hart ist, indem wir das Problem HAMILTONIAN CIRCUIT – von dem bekannt ist, dass es NP-hart ist – polynomiell auf LONGEST CIRCUIT reduzieren. Die Reduktionsfunktion f: $(V, E) \mapsto (V', E', w, k)$ bildet einen Graphen $G = (V, E)$ ab
- auf einen Graphen $G' = (V', E')$ mit $V' := V$ und $E' := E$ und
- auf eine Gewichtsfunktion w: $(u, v) \mapsto 1$, die allen Kanten (u, v) das Gewicht 1 zuordnet,
- und auf eine natürliche Zahl $k := |V|$.

Offensichtlich kann die Funktion f in polynomieller Zeit realisiert werden. Wir zeigen nun, dass $G \in$ HAMILTONIAN CIRCUIT gdw. $f(G) \in$ LONGEST CIRCUIT.

$\Rightarrow$) Sei $G \in$ HAMILTONIAN CIRCUIT. Es existiert also in G ein einfacher Kreis C mit $|C| = |V| = k$. Wegen $G' = G$ existiert dieser Kreis auch in G'. Ein einfacher Kreis hat immer genau so viele Knoten wie Kanten. C hat also k Kanten. Da jede Kante das Gewicht 1 hat, hat C die Länge k. Also gilt $f(G) \in$ LONGEST CIRCUIT.
$\Leftarrow$) Sei $f(G) \in$ LONGEST CIRCUIT. Es existiert also in G' ein einfacher Kreis C der Länge $\geq k$. Da alle Kanten das Gewicht 1 haben, besteht C aus mindestens k Kanten, also auch aus mindestens k Knoten. Da G' nur $|V'| = |V| = k$ Knoten enthält, kann C nicht mehr als k Knoten enthalten, also besteht C aus genau k Knoten. Wegen $G = G'$ gibt es den einfachen Kreis C auch in G. Also gilt $G \in$ HAMILTONIAN CIRCUIT.