Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Prof. Dr. D. Wagner

Theoretische Informatik
WS 2003/04
14. April 2004

2. Klausur zur Vorlesung Informatik III Wintersemester 2003/2004

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **61** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
1	2	2	4	4	12					
2	3	4	2	3	12					
3	3	3	3	3	12					
4	2	4	3	3	12					
5	13x1				13					
Σ					61					

Aufgabe 1: (2+2+4+4=12 Punkte)

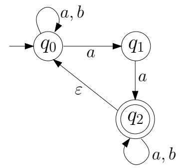
(a) Gegeben seien die beiden folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$L_1 = \{$alle Wörter, die aa oder bb enthalten$\}$
$L_2 = \{$alle Wörter, in denen höchstens einmal aa und nie bb vorkommt$\}$

Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und L_2 an.

(b) Geben Sie den Übergangsgraphen eines endlichen Automaten an, der L_1 aus Teilaufgabe (a) erkennt.

(c) Gegeben sei folgender nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA):



Konstruieren Sie mittels Potenzmengen-Konstruktion den äquivalenten deterministischen endlichen Automaten (DEA).

(d) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } ab\}$. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation bezüglich L auf Σ^*.

Aufgabe 2: (3+4+2+3=12 Punkte)

(a) Betrachten Sie folgende Instanz des Post'schen Korrespondenzproblems über dem Alphabet $\{0, 1\}$:

$$K = ((100, 001), (100, 1), (10, 001), (10, 010))$$

(i) Geben Sie eine Indexfolge an, die K löst.

(ii) Modifizieren Sie K durch Entfernen *eines* Paares, so dass die Instanz nicht mehr lösbar ist. Begründen Sie, dass es für Ihre Modifikation keine Lösung gibt.

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet, $L_1 \subset \Sigma^*$ nicht entscheidbar und $\emptyset \neq L_2 \subset \Sigma^*$ entscheidbar. Sei ferner $L = \{w_1 X w_2 \colon w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$ mit $X \notin \Sigma$.

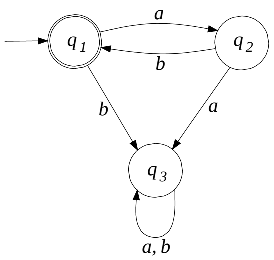
Ist L entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Gegeben sei eine Turingmaschine M mit folgender Eigenschaft: Wenn M ein Wort akzeptiert, dann geschieht das in weniger als 1000 Schritten. Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe geben.

	Wahr	Falsch
$L(M)$ ist entscheidbar.	☐	☐
$L(M)$ ist notwendigerweise endlich.	☐	☐

(d) Geben Sie graphisch eine deterministische Turingmaschine nach Definition aus der Vorlesung an, die auf allen Eingaben über dem Alphabet $\{a, b\}$ hält und dieselbe Sprache akzeptiert wie der folgende deterministische endliche Automat:



Aufgabe 3: (3+3+3+3 = 12 Punkte)

[Hinweis: Für in dieser Aufgabe vorkommende Probleme sind jeweils am Ende des Aufgabentextes Definitionen angegeben.]

(a) Zeigen Sie: LONGEST CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Problem LONGEST CYCLE (LC)

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Konstante K

Frage: Gibt es einen einfachen Kreis in G, der mindestens die Länge K hat?

Problem HAMILTONKREIS (HK)

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen einfachen Kreis in G, der jeden Knoten genau einmal enthält?

[Ein einfacher Kreis der Länge ℓ ist eine Folge von ℓ verschiedenen Knoten, so dass jeweils eine Kante zwischen dem $(i + 1)$-ten und dem i-ten, sowie zwischen dem ersten und letzten Knoten besteht.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass HAMILTONKREIS $\mathcal{NP}$-vollständig ist.]

(b) Formulieren Sie das Erfüllbarkeitsproblem SAT als 0/1-ILP. Geben Sie also an, wie für eine beliebige Instanz von SAT mit den Klauseln $K_1, \ldots, K_k$ über den Variablen $V_1, \ldots, V_l$ eine äquivalente Instanz von 0/1-ILP konstruiert werden kann.

Problem 0/1-INTEGER-PROGRAMMING (0/1-ILP)

Gegeben: Eine $(m \times n)$-Matrix A ganzer Zahlen und ein Spaltenvektor b von m ganzen Zahlen.

Frage: Gibt es einen Lösungsvektor x mit n Einträgen nur 0 oder 1 so, dass $Ax \geq b$?

(c) Zeigen Sie: Die Klasse $\mathcal{DTAPE}(n^2)$ ist unter Durchschnittsbildung abgeschlossen, d.h. mit $L_1, L_2 \in \mathcal{DTAPE}(n^2)$ ist auch $L_1 \cap \mathrm{L}_2 \in \mathcal{DTAPE}(n^2)$.

(d) Sei Π ein Minimierungsproblem. Für jede gerade Zahl ℓ gebe es einen Algorithmus A_ℓ für Π mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Eingabe für A_ℓ ist eine Instanz I von Π.
2. Die Ausgabe ist eine Zahl $A_\ell(I)$ mit

$$1 \leq \frac{A_\ell(I)}{\mathrm{OPT}(I)} \leq 1 + \frac{1/2}{1 + \ell/2} \quad ,$$

   wobei $\mathrm{OPT}(I)$ der Wert einer optimalen Lösung von I sei.
3. Die Laufzeit von A_ℓ sei in $\mathcal{O}(2^\ell + n)$.

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen aus der Existenz der A_ℓ und unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ folgen. Begründen Sie ihre Antwort (jeweils zwei Sätze genügen).

(i) Es gibt einen Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 für Π.

(ii) Es gibt ein PAS für Π.

(iii) Es gibt ein FPAS für Π.

Aufgabe 4: (2+4+3+3=12 Punkte)

Sei eine Grammatik G über dem Alphabet $\{0, 1\}$, der Variablenmenge $\{S, A, B\}$, dem Startsymbol S und den folgenden Regeln gegeben:

$$S \to A1B, \quad A \to 0A \mid \varepsilon, \quad B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon.$$

(a) Geben Sie den Syntaxbaum für eine Ableitung des Wortes 00100 gemäß G an.

(b) Bringen Sie G durch eine systematische Konstruktion in Chomsky-Normalform (die einzelnen Schritte müssen dabei klar erkennbar sein!).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Ogden, dass die Sprache

$$L := \{a^i b^j a^k \mid j = \max\{i, k\}\}$$

nicht kontextfrei ist.
(Hinweis: Sie können dazu das Wort $z = a^n b^n c^n$ mit der Markierung b^n wählen.)

(d) Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

Unendliche Vereinigungen kontextfreier Sprachen sind kontextfrei. (Mit anderen Worten: Falls für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Sprachen L_i kontextfrei sind, dann ist auch $L := \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ kontextfrei.)

Aufgabe 5: (13x1=13 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

	Wahr	Falsch
Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen. Dann ist auch $L_1 \setminus L_2 = \{w \in L_1 \mid w \notin L_2\}$ regulär.	☐	☐
Die regulären Ausdrücke $a(b^* \cup c^*)$ und $a(b \cup c)^*$ sind äquivalent.	☐	☐
Das Komplement der universellen Sprache ist nicht semientscheidbar.	☐	☐
Seien L_1 und L_2 zwei semientscheidbare Sprachen. Dann ist auch $L_1 \setminus L_2 = \{w \in L_1 \mid w \notin L_2\}$ semientscheidbar.	☐	☐
Sei $L \subset \{0,1\}^*$ nicht entscheidbar. Dann gilt: Der Index der Neroderelation zu L ist unendlich.	☐	☐
Aus 3SAT $\in \mathcal{P}$ folgt 2SAT $\in \mathcal{NPC}$.	☐	☐
Falls es einen Approximationsalgorithmus für CLIQUE mit absoluter Gütegarantie gibt, so gilt $P = NP$	☐	☐
Es gibt ein Entscheidungsproblem $\Pi \in \mathcal{NP}$, für das es keine polynomiale Transformation $\Pi \propto SAT$ gibt.	☐	☐
Sei k eine Konstante. Die Sprache $\text{VC}_k := \{G \mid G = (V, E)$ ist ein Graph und hat eine Knotenüberdeckung $V' \subset V$ mit $|V| \leq k\}$ ist in $\mathcal{P}$.	☐	☐
Zu jeder entscheidbaren Sprache L existiert eine Chomsky-Typ-0-Grammatik, die L erzeugt.	☐	☐
Jede Sprache der Form $\{x_1^n x_2^n \dots x_k^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei. (Dabei sei $k \geq 1$ und die x_i jeweils Buchstaben aus einem endlichen Alphabet mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.)	☐	☐
Zu jedem nichtdeterministischen Kellerautomat gibt es einen deterministischen Kellerautomaten, der dieselbe Sprache akzeptiert.	☐	☐
Die Grammatik, die nur aus der Regel $S \rightarrow \varepsilon$ besteht, erzeugt dieselbe Sprache wie eine Grammatik ohne Regeln.	☐	☐