Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Prof. Dr. D. Wagner

Theoretische Informatik
WS 2004/05
24. Februar 2005

1. Klausur zur Vorlesung Informatik III Wintersemester 2004/2005

Aufkleber

Beachten Sie:

- Bringen Sie Ihren *Aufkleber* auf diesem Deckblatt an, und beschriften Sie *jedes weitere Blatt* mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
1	3	3	3	3	12					
2	2	3	3	4	12					
3	3	3	3	3	12					
4	3	3	3	3	12					
5	12x1				12					
Σ					60					

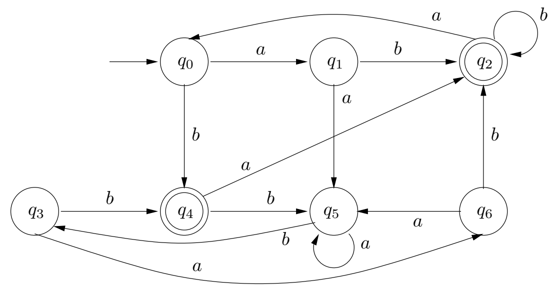
Aufgabe 1: (3+3+3+3=12 Punkte)

(a) Geben Sie einen endlichen Automaten über dem Alphabet $\{I, V, X\}$ *mit nicht mehr als sieben Zuständen* an (Übergangsdiagramm genügt), der genau die römischen Zahlen zwischen 1 und 10 erkennt, also die Menge

$$\{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X\}.$$

Hinweis: Für jeden weiteren benötigten Zustand verringert sich die Anzahl der für diese Teilaufgabe erreichbaren Punkte um 1.

(b) Minimieren Sie den durch nachfolgendes Diagramm gegebenen Automaten durch eine systematische Konstruktion, und geben Sie den daraus resultierenden minimalen DEA (Übergangsdiagramm genügt) an.



(c) Zeigen Sie für die Sprache $L_1 = \{01^k0^l1 : k, l \geq 0\}$ *explizit*, dass die im Pumping-Lemma formulierte notwendige Bedingung für Regularität erfüllt ist. (Geben Sie also eine konkrete ‚Belegung' für die existenzquantifizierten Ausdrücke an, und begründen Sie.)

(d) Sei L_2 die reguläre Sprache $(0 \cup 1)^+00$. Geben Sie für L_2 die Äquivalenzklassen bezüglich der Neroderelation (in ‚Mengenschreibweise') an sowie für jede Klasse einen Repräsentanten.

Aufgabe 2: (2+3+3+4=12 Punkte)

Betrachten Sie die Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Zustandsmenge $Q = \{s, f, p, q, r\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$, Startzustand s, Endzustandsmenge $F = \{f\}$ und folgender Übergangsfunktion δ:

$$
\begin{array}{lll}
\delta(s,a) \to (p,b,R) & \delta(p,a) \to (r,\sqcup,R) & \delta(q,a) \to (p,b,R) \\
\delta(s,b) \to (r,\sqcup,R) & \delta(p,b) \to (q,a,R) & \delta(q,b) \to (r,\sqcup,R) \\
\delta(s,\sqcup) \to (f,a,N) & \delta(p,\sqcup) \to (r,\sqcup,R) & \delta(q,\sqcup) \to (f,b,R) \\
\delta(r,a) \to (r,\sqcup,R) & \delta(f,a) \to (f,a,N) & \\
\delta(r,b) \to (r,\sqcup,R) & \delta(f,b) \to (f,b,N) & \\
\delta(r,\sqcup) \to (r,\sqcup,N) & \delta(f,\sqcup) \to (f,\sqcup,N) &
\end{array}
$$

(a) Geben Sie die von $\mathcal{M}$ durchlaufenen Konfigurationen bei Abarbeitung der Wörter ba beziehungsweise $ababab$ an.

(b) Geben Sie die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{M})$ an.

Sei g die durch $\mathcal{M}$ realisierte Funktion. Geben Sie g, eingeschränkt auf $L(\mathcal{M})$, explizit an.

Wie sieht $g(aab)$ aus?

(c) Sei L eine nichtleere Sprache über einem Alphabet Σ. Zeigen Sie: Falls es eine total berechenbare Funktion $h : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $h(\mathbb{N}) = L$ gibt, dann ist L semientscheidbar.

(d) Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller kontextfreien Grammatiken, die mindestens ein Palindrom erzeugen, und

$$L_P = \{\text{code}(G) \mid G \in \mathcal{G}\} ,$$

wobei code(G) eine geeignete Kodierung von G über einem festen Alphabet bezeichne.

Zeigen Sie, dass L_P *nicht* entscheidbar ist.

Hinweis: Zu einer PKP-Instanz I kann eine kontextfreie Grammatik konstruiert werden, deren Sprache genau dann ein Palindrom enthält, wenn I eine Lösung hat.

Aufgabe 3: (3+3+3+3=12 Punkte)

(a) **Problem 4TA-SAT**

Gegeben: Variablenmenge U, Menge C von Klauseln über U.
Frage: Gibt es *vier verschiedene* erfüllende Belegungen von U?

Zeigen Sie die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 4TA-SAT.

(b) **Problem CLIQUE COLORING**

Gegeben: Graph G mit $2n$ Knoten ($n \in \mathbb{N}$), wobei G aus isolierten (untereinander nicht verbundenen) Cliquen besteht.

Frage: Ist für alle möglichen Färbungen der Cliquen mit den Farben rot und grün (so, dass alle Knoten einer Clique dieselbe Farbe besitzen) die Anzahl der roten Knoten in G ungleich n?

Zeigen Sie, dass CLIQUE COLORING in co-$\mathcal{NP}$ liegt.

(c) **Integer Linear Program (ILP)**

Ein ILP besteht allgemein aus einem System von m Ungleichungen in n Variablen der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m)\,,$$

wobei alle a_{ij}, b_i, x_j ganzzahlig sind.

Problem INDEPENDENT SET

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Parameter $K \leq |V|$.

Frage: Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq K$ so, dass für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt, dass $\{u, v\} \notin E$.

Geben Sie ein ILP für INDEPENDENT SET an.

(d) Zeigen Sie: SAT $\in \mathcal{DTAPE}(n)$, wobei n die Eingabelänge einer SAT-Instanz bezeichne.

Aufgabe 4: (3+3+3+3=12 Punkte)

Die Grammatiken G bzw. G' seien gegeben durch das Alphabet $\{a, b, c\}$, die Variablenmenge $\{S, T\}$, das Startsymbol S und die folgenden Regeln R bzw. R':

$$R = \{S \to aSc \mid T \mid ac, \quad T \to aTb \mid ab\}, \qquad R' = R \cup \{T \to aTc\}\ .$$

(a) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der genau die Sprache $L(G)$ akzeptiert (ohne Begründung).

(b) Bringen Sie G' durch eine systematische Konstruktion auf Chomsky-Normalform.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, dass das Wort $aabc$ in $L(G')$ enthalten ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^p b^q c^r d^s : p = q + r = s;\ p, q, r, s \in \mathbb{N}_0\}$ *nicht* kontextfrei ist.

Aufgabe 5: (12x1=12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe gegeben.

Aussage	wahr	falsch
Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten, dessen Startzustand eine Schleife (Übergang auf sich selbst) besitzt, erkannt wird, ist unendlich.	☐	☐
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein endlicher Automat. Falls es $p, q \in Q$ gibt, für die für alle $w \in \Sigma^*$ gilt, dass wenn $\delta(p, w) \in F$, dann auch $\delta(q, w) \in F$ ist, so ist $\mathcal{A}$ nicht zustandsminimal.	☐	☐
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass falls es ein Wort $w \in L$ mit $\lvert w\rvert \geq n$ gibt, w so in uvx mit $\lvert uv\rvert \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ zerlegt werden kann, dass $uv^i x \in L$ ist für mindestens ein $i \in \mathbb{N}_0$.	☐	☐
Sei L eine semientscheidbare Sprache, deren Komplement entscheidbar ist. Dann ist L entscheidbar.	☐	☐
Sei $H_\varepsilon := \{\langle \mathcal{M} \rangle : \text{TM } \mathcal{M} \text{ hält auf Eingabe } \varepsilon\}$, dann ist die charakteristische Funktion von H_ε berechenbar.	☐	☐
Die Sprache $\{wv : v \in L(T_{\overline{w}})\}$ ist entscheidbar, wobei $\overline{w}$ das bitweise Komplement des Wortes w (jede 0 wird durch 1 ersetzt und umgekehrt) bezeichne.	☐	☐
Es existiert eine Transformation 2SAT $\propto$ 3SAT.	☐	☐
Falls CLIQUE $\in$ co$-\mathcal{NP}$, dann gilt $\mathcal{NP} =$ co$-\mathcal{NP}$.	☐	☐
Für KNAPSACK existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, falls n^4 eine obere Schranke für das Gesamtgewicht W ist (wobei n die Anzahl der Objekte sei).	☐	☐
Sei G eine Typ-k-Grammatik. Dann ist der maximale Chomsky-Typ von $L(G)$ ebenfalls k.	☐	☐
Die Sprache $\left[\Big((\{a^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cdot \{c\}) \cup \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}\Big) \cdot \{b^n : n \in \mathbb{N}_0\}\right] \cap \left[\{a^n c b^n : n \in \mathbb{N}_0\}\right]$ ist kontextfrei.	☐	☐
Mit Grammatiken vom Typ 1 bzw. 2 lassen sich in n Ableitungsschritten nur Wörter der Länge höchstens n erzeugen.	☐	☐