Name

Vorname

Matrik

Lösungsvorschlag

Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme

o. Prof. Dr. P. Deussen

12. April 2002

Klausur: Informatik III

Aufgabe 1.	Multiple Choice	10 Punkte
Aufgabe 2.	Modellprüfung und Rekursiver Abstieg	6 Punkte
Aufgabe 3.	Kontextfreie Sprachen	12 Punkte
Aufgabe 4.	Einige Beweise zur Fixpunkttheorie	8 Punkte
Aufgabe 5.	Berechenbarkeit	14 Punkte
Aufgabe 6.	Akzeptoren – algebraisch	10 Punkte
		60 Punkte

Bitte beachten Sie:
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Kleben Sie Ihren Namensaufkleber oben auf das Deckblatt und schreiben Sie auf **alle** übrigen Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die Klausur enthält 10 Blätter und gilt als bestanden, wenn Sie 20 Punkte erreichen.

Aufgabe		1	2	3	4	5	6	Summe
max. Punkte		10	6	12	8	14	10	60
Punkte	EK							
	ZK							

Note:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Multiple Choice 10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

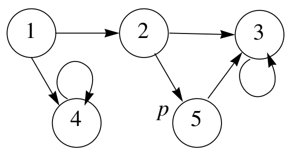
Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

		richtig	**falsch**
1.	Eine Satzform enthält nur Terminalzeichen.		×
2.	Zu jeder Sprache L gibt es eine Chomsky-Grammatik G vom Typ 0 mit $L(G) = L$.		×
3.	Die Sprache $\{a^n b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.		×
4.	Die Sprache $\{ww : w \in T^*\}$ mit $T = \{a, b\}$ ist vom Typ 1.	×	
5.	Die leere Menge ist entscheidbar.	×	
6.	Es gibt entscheidbare Mengen, deren Schnitt nicht aufzählbar ist.		×
7.	Wenn (a, b) und (a, c) zu einer Äquivalenzrelation gehören, dann auch (b, c).	×	
8.	Ein Bereich hat ein kleinstes Element.	×	
9.	Jede stetige Funktion ist monoton. (*)	×	
10.	Jede stetige Funktion hat Fixpunkte. (*)	×	

(*) Bitte beachten Sie, daß bei Aussage 9 und 10 der Stetigkeitsbegriff der Vorlesung „Informatik III“ gemeint ist.

Aufgabe 2. Modellprüfung und Rekursiver Abstieg (6 Punkte)

a. Eine Kripke-Struktur $K = (S, R, A, L)$ sei durch folgende Abbildung gegeben.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$L(5) = \{p\}$
$L(s) = \emptyset$ für $s \in \{1, 2, 3, 4\}$

Für welche Zustände $s \in S$ gilt $s \models A\Box(\neg p)$? Die Angabe der Zustände genügt.

Für $s = 3, 4$

b. Eine Grammatik $G = (N, T, \Pi, S)$ mit den Nichtterminalzeichen $N = \{S, A\}$, den Terminalzeichen $T = \{[,], a, b\}$ und den folgenden Produktionen Π sei gegeben:

$S ::= [A] \mid a, \quad A ::= S \mid bA$

Geben Sie zu jedem Nichtterminalzeichen die zugehörige Prozedur für den rekursiven Abstieg an.

```
proc S;
case
    1:w ∈ {[}:  V([); A; V(]);
    1:w ∈ {a}:  V(a);
    else: print „z ∉ L“; stop;
esac
```

```
proc A;
case
    1:w ∈ {[, a}:  S;
    1:w ∈ {b}:  V(b); A;
    else: print „z ∉ L“; stop;
esac
```


Aufgabe 3. Kontextfreie Sprachen 12 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, \Pi, S)$ mit $V = N \cup T$, den Terminalzeichen $T = \{a, b, d\}$, den Nichtterminalzeichen $N = \{S, D\}$ und den Produktionen Π:
$S ::= aSb \mid D, \quad D ::= dD \mid \varepsilon.$

a. Gehört *aadbb* zur erzeugten Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, weil $S \to aSb \to aaSbb \to aaDbb \to aadDbb \to aadbb$

b. Zeigen Sie, daß Sie alle Wörter der Form $a^n db^n$, wobei $n \geq 1$, mit Hilfe von G ableiten können.

$a^n db^n$ ist ableitbar aus $a^n Sb^n$, da $a^n Sb^n \to a^n Db^n \to a^n dDb^n \to a^n db^n$

Durch Induktion über n ($n \geq 1$) zeigen wir $S \Rightarrow a^n Sb^n$

Induktionsanfang: $S \to aSb$.

Induktionsschritt: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es die Ableitung $S \Rightarrow a^n Sb^n$.
Mit $S ::= aSb$ erhalten wir $a^n Sb^n \to a^{n+1} Sb^{n+1}$ und damit $S \Rightarrow a^{n+1} Sb^{n+1}$.

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe auf dem nächsten Blatt)

Fortsetzung von Aufgabe 3. Produktionen Π von G: $S ::= aSb \mid D$, $D ::= dD \mid \varepsilon$

c. Geben Sie die zu G gehörenden Π_{LL}-Produktionen an.

$Sq ::= bSaq \mid Dq$ $\quad$ $Dq ::= Ddq \mid q$

$tqt ::= q$ für alle $t \in T$

d. Bestimmen Sie für **alle** Produktionen $A ::= r$ von Π die Mengen $\mathrm{First}_1(r\ \mathrm{Follow}(A))$.
Ist die Grammatik SLL(1)? Begründen Sie Ihre Antwort.

$S ::= aSb \mid D$	$\mathrm{First}_1(aSb\ \mathrm{Follow}(S)) = \{a\}$
	$\mathrm{First}_1(D\ \mathrm{Follow}(S)) = \{d, b, \#\}$
$D ::= dD \mid \varepsilon$	$\mathrm{First}_1(dD\ \mathrm{Follow}(D)) = \{d\}$
	$\mathrm{First}_1(\varepsilon\ \mathrm{Follow}(D)) = \{b, \#\}$

Die Grammatik ist SLL(1), da die Bedingung „$\mathrm{First}_1(r\ \mathrm{Follow}(A)) \cap \mathrm{First}_1(s\ \mathrm{Follow}(A)) = \emptyset$ für je zwei Produktionen der Form $A ::= r \mid s$" erfüllt ist

Aufgabe 4. Einige Beweise zur Fixpunkttheorie 8 Punkte

a. Sei $(M, \leq)$ ein Bereich und $K, L \subseteq M$ Ketten mit $\sup K > \sup L$.
Zeigen Sie, daß es ein $k \in K$ gibt, für das $k \leq \sup L$ nicht zutrifft.

Annahme: für alle $x \in K$ sei $x \leq \sup L$. Dann ist $\sup L$ obere Schranke von K und da $\sup K$ die kleinste obere Schranke von K ist, wäre $\sup K \leq \sup L$. Ein Widerspruch.

b. Auf der Menge $Z = \{\perp, 0, 1\}$ sei die Ordnung $\perp \leq 0$ und $\perp \leq 1$ gegeben.
Zeigen Sie, daß die Funktion f mit $f(\perp) = \perp$ und $f(1) = f(0) = 1$ stetig ist.

Da $f(\perp) = \perp$, ist die Funktion monoton und da jede Kette in Z ihre kleinste obere Schranke enthält, folgt wegen Übungsblatt 14, Aufgaben 1b und c die Stetigkeit.

Aufgabe 5. Berechenbarkeit 14 Punkte

a. Ist die ACKERMANN-Funktion loop-berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein. Die ACKERMANN-Funktion ist nicht primitiv-rekursiv.
Da die primitiv-rekursiven Funktion die loop-berechenbaren sind, kann die ACKERMANN-Funktion nicht loop-berechenbar sein.

b. Zeigen Sie, daß die folgende Funktion $\theta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ nicht total ist.

$$\theta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \varphi_i(k)\downarrow \text{ für ein } k \le j \\ \bot & \text{, sonst} \end{cases}$$

Annahme (indirekter Beweis): θ ist total
Dann ist θ konstant 1 und es gibt mithin zu allen i, j ein $k \le j$, so daß $\varphi_i(k)\downarrow$.
Dies gilt insbesondere für $j = 0$, woraus $\varphi_i(0)\downarrow$ für alle i folgt.
Damit wäre aber jede berechenbare Funktion an der Stelle 0 definiert.
Das ist ein Widerspruch! Die überall undefinierte Funktion ist berechenbar und insbesondere an der Stelle 0 nicht definiert.

c. Welche einstellige Funktion $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und welche zweistellige Funktion $f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende While-Programm?

```
begin
    while X3≠X4 do begin end od;
    X1:=Nachf(X2)
end
```

$f_1(x) = 1$
$f_2(x, y) = y + 1$

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe auf dem nächsten Blatt)

Fortsetzung von Aufgabe 5.

d. Zeigen Sie mit Hilfe des snm-Theorems, des Rekursionssatzes und der Funktion

$$h(n, x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \varphi_n = 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases},$$

daß die Menge $M = \{n : \varphi_n = 0\}$ nicht entscheidbar ist.

Notation. $\varphi_n = 0$ heißt, daß φ_n konstant 0 ist, d.h. $\varphi_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Annahme (indirekter Beweis): M entscheidbar.

Dann ist χ_M berechenbar und somit auch die Funktion h:

$$h(n, x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \varphi_n = 0 \text{ (d.h., falls } \chi_M(n) = 1) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Also $h = \varphi_e^{(2)}$ für ein e und mit dem snm-Theorem folgt: $\varphi_e^{(2)}(n, x) = \varphi_{s_1^1(e, n)}(x)$.

Wir definieren eine Funktion f durch $f(n) = s_1^1(e, n)$. Da diese auch total und berechenbar ist (dies folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von s_1^1), gibt es (Rekursionssatz) ein n, so daß $\varphi_{f(n)} = \varphi_n$ und damit

$$\varphi_n(x) = \varphi_{f(n)}(x) = \varphi_{s_1^1(e, n)}(x) = \varphi_e^{(2)}(n, x) = h(n, x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \varphi_n = 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

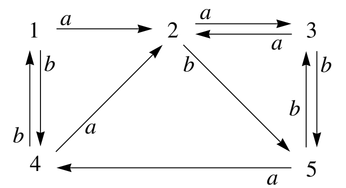
Also φ_n konstant 1, falls φ_n konstant 0 und φ_n konstant 0, falls nicht φ_n konstant 0.
Widerspruch!

Aufgabe 6. Akzeptoren – algebraisch (10 Punkte)

Gegeben sei ein Akzeptor A mit den Zuständen $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, den Terminalzeichen $T = \{a, b\}$ und dem Startzustand 3. Die Zustandsübergänge seien durch das rechte Diagramm gegeben. Die Finalmenge F enthalte genau zwei Zustände.

Es sei ferner die Äquivalenzrelation $\rho_0 = \{(q_1, q_2) \in Q \times Q : q_1 \in F \text{ gdw. } q_2 \in F\}$ durch die folgenden Paare gegeben:

(1, 1)	(1, 2)		(1, 4)	
(2, 1)	(2, 2)		(2, 4)	
		(3, 3)		(3, 5)
(4, 1)	(4, 2)		(4, 4)	
		(5, 3)		(5, 5)



Zustandsübergänge von A

a. Geben Sie die beiden Finalzustände an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Klassen von ρ_0 sind F und $Q \setminus F$ und lauten $\{3, 5\}$ und $\{1, 2, 4\}$ oder umgekehrt. Da es laut Voraussetzung genau zwei Finalzustände gibt, muß $F = \{3, 5\}$ sein.

b. Markieren Sie die Paare, die zu ρ_1 gehören mit ✔ und die anderen Paare mit ×.

(1, 1) ✔	(1, 2) ×	(1, 3) ×	(1, 4) ✔	(1, 5) ×
(2, 1) ×	(2, 2) ✔	(2, 3) ×	(2, 4) ×	(2, 5) ×
(3, 1) ×	(3, 2) ×	(3, 3) ✔	(3, 4) ×	(3, 5) ✔
(4, 1) ✔	(4, 2) ×	(4, 3) ×	(4, 4) ✔	(4, 5) ×
(5, 1) ×	(5, 2) ×	(5, 3) ✔	(5, 4) ×	(5, 5) ✔

c. Ist das Paar $(1, 1)$ in ρ_2 enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Es gilt $(1, 1) \in \rho_2$, da ρ_2 eine Äquivalenzrelation ist und diese stets reflexiv sind.

d. Ist das Paar $(3, 5)$ in ρ_2 enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort

Es gilt $(3, 5) \notin \rho_2$, da das Paar $(\langle 3a \rangle, \langle 5a \rangle) = (2, 4)$ nicht in ρ_1 enthalten ist.

Konzeptpapier